Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz*

Eine Darstellung für Logiker in spe

Christopher von Bülow
Universität Konstanz, Fakultät für Mathematik

März 1992

Zusammenfassung

Mit Hilfe des Rekursivitätsbegriffs und des Repräsentierbarkeitssatzes für rekursive Funktionen wird der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz bewiesen. Der Beweis ist nicht originell, aber Gegenstand des Satzes und Beweisidee werden ausführlich erklärt. Gedacht für Leute mit Grundkenntnissen (aber nicht langjähriger Erfahrung) in Mathematik und Mathematischer Logik.

Inhaltsverzeichnis

*Dieser Aufsatz ist die schriftliche Ausarbeitung eines Referats, das ich im Wintersemester 1991/92 in einem Seminar über Logik und Modelltheorie bei Prof. Dr. A. Prestel, Dr. U. Friedrichsdorf und Dipl.-Math. J. Königsmann an der Universität Konstanz gehalten habe.

0 Vorbemerkung

Zur Unterscheidung von *metasprachlichen* Variablen (kurz *Metavariablen*) wie ‚x', ‚φ', ‚t' und ‚Σ', die z.B. für Mengen und Funktionen, aber auch für Zeichen(-reihen) der von uns betrachteten Objektsprache stehen können, und *objektsprachlichen* Variablen wie etwa ‚$\mathtt{v}_7$' oder, im Falle der hier gewählten Syntax, ‚$\mathtt{'''''''v}$', die zunächst einmal bloße Zeichen (der Objektsprache) sind, benütze ich die Konvention, Zeichen zu $\underline{\textit{unterstreichen}}$, wenn sie nur für sich selbst stehen. (Das dient auch der Unterscheidung von objektsprachlichen Ausdrücken und metasprachlichen Abkürzungen für solche.) Das ist nichts anderes als eine ungewohnte Art von Anführungsstrichen. So ist also $\underline{i}$ dasselbe wie ‚i', nämlich der neunte Buchstabe des lateinischen Alphabets (kleingeschrieben), während i je nach Kontext die imaginäre Einheit oder etwa eine natürliche Zahl ist. Man sollte sich dabei nicht davon verwirren lassen, daß das Plus- und das Kleinerzeichen unserer Objektsprache, $\underline{+}$ und $\underline{<}$, unter dieser Schreibweise dem Plusminus- und dem Kleinergleichzeichen der Metasprache, ‚$\pm$' und ‚$\leq$', ähnlich sehen. Wem all das zu umständlich ist, der oder die wird keine Probleme haben, wenn er oder sie die Unterstreichungen einfach übersieht.

Im Text bezeichnet ‚$\mathbb{N}$' die Menge der natürlichen Zahlen und ‚$\mathcal{N}$' die *Struktur* der natürlichen Zahlen: $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}, +_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}}, 0, 1)$. $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ sei die zugehörige Sprache „$\underline{<}$, $\underline{+}$, $\underline{\cdot}$, $\underline{0}$, $\underline{1}$". Wenn $n \in \mathbb{N}$ ist, schreibe ich ‚$[n]$' als Abkürzung für ‚$\{1, 2, \ldots, n\}$'.

Als logische Symbole (bzw. Abkürzungen) der Metasprache verwende ich ‚&', ‚$\Rightarrow$' und ‚$\Leftrightarrow$' in den naheliegenden Bedeutungen.

Ich setze Grundkenntnisse über rekursive Funktionen voraus und benütze speziell den Repräsentierbarkeitssatz sowie die rekursiven arithmetischen Funktionen und Prädikate $\dot{-}$, Seq, lh, $(s, m) \mapsto (s)_m$ und für jedes $l \in \mathbb{N}$: $(n_1, n_2, \ldots, n_l) \mapsto \langle n_1, n_2, \ldots, n_l \rangle$, die folgende Eigenschaften haben: $\dot{-}$ ist einfach eine Subtraktion mit natürlichzahligen Werten, d.h. für $m, n \in \mathbb{N}$:

$$m \dot{-} n \quad := \quad \begin{cases} m - n & \text{falls } m \geq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter ist für jede endliche Folge $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ natürlicher Zahlen

$$\langle n_1, n_2, \ldots, n_l \rangle \in \mathbb{N}$$

deren *Folgennummer*; keine zwei solchen Folgen haben dieselbe Folgennummer. Seq(s) (‚Seq' wie *sequence number*) ist genau dann wahr, wenn s eine Folgennummer ist. In diesem Fall gibt $\mathrm{lh}(s) \in \mathbb{N}$ (‚lh' wie *length*) die Länge der verschlüsselten Folge an und $(s)_m$ deren m-tes Glied (wobei die Folgenglieder mit 0 beginnend numeriert sein sollen), d.h.:

$$\mathrm{Seq}(s) \quad \Leftrightarrow \quad s = \big\langle (s)_0, (s)_1, \ldots, (s)_{\mathrm{lh}(s)-1} \big\rangle.$$

Wir können also mit Hilfe der beiden letzteren Funktionen aus einer mittels Seq erkannten Folgennummer die zugehörige Folge wiedergewinnen. Weiter gilt für nichtleere Folgen $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$:

$$\langle n_1, n_2, \ldots, n_l \rangle > l \quad \& \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}\text{: } \langle n_1, n_2, \ldots, n_l \rangle > n_i.$$

Folgennummern sind also stets größer als jede Folgenkomponente. Wenn eine Komponente n_i selbst eine Folgennummer $\langle m_1, m_2, \ldots, m_k \rangle$ ist, so ist $\langle n_1, n_2, \ldots, n_l \rangle$ insbesondere größer als jede Komponente m_j. Und so weiter. Ich kürze ‚$((s)_i)_j$' durch ‚$(s)_{ij}$' ab. Eine komplizierte Folgennummer könnte also folgende Gestalt haben:

$$s = \Big\langle (s)_0, \big\langle (s)_{10}, (s)_{11} \big\rangle, \big\langle (s)_{20}, \langle (s)_{210}, (s)_{211}, (s)_{212} \rangle, (s)_{22} \big\rangle \Big\rangle,$$

wobei dann natürlich auch beispielsweise $s > (s)_{211}$ wäre. Ich verwende in diesem Fall die laxe Sprechweise, „$(s)_{211}$ sei – über Folgencodierung verschachtelt – in s enthalten".

Der Beweis des Unvollständigkeitssatzes orientiert sich an [Shf, Kap. 6] und [Frd, § 8], die Terminologie an [Pr] (s. Literaturverzeichnis).

1 Worum es geht

1.1 Axiomatisierungen

Der eigentliche Gegenstand des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes (ab jetzt: *GUS*) sind *Axiomatisierungen.* Eine Axiomatisierung einer mathematischen Theorie[1] spielt in der Logik eine ähnliche Rolle wie das Erzeugendensystem eines Vektorraums in der Linearen Algebra: In beiden Fällen dient eine Gruppe mehr oder weniger geschickt ausgewählter Repräsentanten dazu, eine Menge (von Vektoren im einen und Aussagen im anderen Fall) besser in den Griff zu kriegen.[2] Kennt man das Erzeugendensystem (bzw. die Axiome), so kennt man in gewisser Weise schon den ganzen Vektorraum (die ganze Theorie), denn es gibt

[1] Eine *Theorie* ist eine widerspruchsfreie und deduktiv abgeschlossene Menge von Aussagen einer Sprache, und eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Formeln heißt *widerspruchsfrei* genau dann, wenn es keine $\mathcal{L}$-Formel φ gibt, so daß sowohl $\Sigma \vdash \varphi$ als auch $\Sigma \vdash \neg\varphi$. Wegen ihrer deduktiven Abgeschlossenheit heißt das für eine Theorie T: Es gibt keine $\mathcal{L}$-Formel φ, so daß sowohl $\varphi \in T$ als auch $\neg\varphi \in T$.

[2] Genaugenommen ist der Begriff *Repräsentant* hier irreführend, da Axiome für eine Theorie nicht unbedingt Elemente dieser Theorie sein müssen. Oft wählt man nämlich aus Ökonomiegründen Formeln mit freien Variablen als Axiome. Diese Ungenauigkeit ist jedoch nicht schlimm, da jede Formel φ logisch gleichwertig mit ihrem Allabschluß $\forall\varphi$ ist, und der *ist* eine Aussage.

ein Verfahren, die Elemente der umfassenden Menge aus den Repräsentanten zu „basteln“: durch Linearkombination im einen und durch logische Ableitung im anderen Fall.

Definition 1 *Eine Menge* Σ *von* $\mathcal{L}$*-Formeln* axiomatisiert *(ist eine* Axiomatisierung für*) eine* $\mathcal{L}$*-Theorie* T *genau dann, wenn* $T = \mathrm{Ded}_{\mathcal{L}}(\Sigma)$.[3]

Nun sind solche Repräsentationen einer Menge im Prinzip sehr leicht zu haben: Die Menge selbst tut's in jedem Fall. Aber diese trivialen Repräsentationen sind natürlich völlig unnütz, da sie keinerlei Zuwachs an „Handlichkeit“ bewirken. Brauchbar ist ein Erzeugendensystem beispielsweise dann, wenn es linear unabhängig ist, d.h. wenn es eine Basis bildet. In der Logik gibt es den entsprechenden Begriff der *logischen* Unabhängigkeit, aber man kann schon froh sein, wenn man nur ein „Verfahren“ hat zu entscheiden, ob eine gegebene Formel ein Axiom ist oder nicht. Genauer gesagt gibt man sich oft schon mit der *Entscheidbarkeit* des Axiomensystems zufrieden, was verglichen mit der logischen Unabhängigkeit eine u.U. wesentlich leichter zu erfüllende Forderung ist.

Definition 2 *Eine* $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$*-Formelmenge* Δ *heißt* entscheidbar *genau dann, wenn das Prädikat, Gödelnummer einer Formel aus* Δ *zu sein, (bzw. die Menge* $\{ \ulcorner\alpha\urcorner \mid \alpha \in \Delta \}$*) rekursiv ist. Andernfalls heißt* Δ unentscheidbar.

Gödelnummern und die Funktion $\ulcorner\ \urcorner$ werden wir erst in Abschnitt 4.1 einführen. Bis dahin stellt man sich Entscheidbarkeit am besten lax als eine Art von Berechenbarkeit bzw. Rekursivität vor.

Nicht verwechselt werden sollten die Entscheidbarkeit von *Formelmengen* und die von *Aussagen* in einer Theorie (s. Fußnote 4).

1.2 Korrektheit und Vollständigkeit

Das übliche Vorgehen, wenn man eine Axiomatisierung für eine Theorie sucht, ist jedoch eher umgekehrt. Nicht etwa streicht man solange Aussagen der Theorie fort, bis eine handliche und doch leistungsfähige Menge übrigbleibt – denn man hat ja die Theorie selbst noch gar nicht gut im Griff –, sondern man häuft (bildlich gesprochen) solange Axiome aufeinander, bis der Stapel hoch genug ist, daß man von ihm aus auch das komplizierteste Theorem erreichen kann. Man wird dabei automatisch darauf achten, daß der Haufen nicht zu unübersichtlich wird und seine Entscheidbarkeit verliert; d.h. man stapelt säuberlich ein einzelnes Axiom oder Axiomenschema auf das andere, anstatt mit dem Bagger Axiome sorglos dazuzuschaufeln.

Das Problem hierbei ist, daß der Stapel nicht zu hoch, aber auch nicht zu niedrig werden darf: Der „Stapel“ ist „zu hoch“, wenn man aus dem Axiomensystem *zuviele* Aussagen ableiten kann, d.h. wenn man Aussagen erhält, die

[3]Wobei $\mathrm{Ded}_{\mathcal{L}}(\Sigma) := \{ \varphi \in \mathrm{Aus}(\mathcal{L}) \mid \Sigma \vdash \varphi \}$ der deduktive ($\mathcal{L}$-)Abschluß einer $\mathcal{L}$-Formelmenge ist. Üblicherweise lassen wir den Index ‚$\mathcal{L}$‘ weg.

gar nicht in der anvisierten Theorie enthalten sind,[4] und er ist „zu niedrig", wenn man *zuwenig* Aussagen ableiten kann, d.h. wenn man einige in der Theorie enthaltene Aussagen nicht erhält.

Soll ein formales System (hier die Prädikatenlogik erster Stufe, ergänzt durch eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln, die Axiome) „reale" mathematische Objekte beschreiben (in diesem Fall eine bestimmte $\mathcal{L}$-Struktur), so faßt man die Qualität einer solchen Beschreibung mittels des Begriffspaars der *Korrektheit* und *Vollständigkeit.* Sie entsprechen in der Stapelmetapher den Sachverhalten „niedrig genug" und „hoch genug". In der folgenden, etwas unüblichen Definition verzichte ich darauf, die verwendete Logik zu erwähnen.

Definition 3 *Eine $\mathcal{L}$-Formelmenge Σ heißt* korrekt für *eine nichtleere Klasse M von $\mathcal{L}$-Strukturen genau dann, wenn* $\mathrm{Ded}_{\mathcal{L}}(\Sigma) \subset \mathrm{Th}(M)$[5]*, d.h. wenn für alle $\mathcal{L}$-Aussagen φ gilt:*

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \textit{für alle } \mathcal{A} \in M\text{: } \mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Andernfalls heißt Σ inkorrekt für *M.*

Umgekehrt heißt Σ vollständig für *M genau dann, wenn* $\mathrm{Th}(M) \subset \mathrm{Ded}_{\mathcal{L}}(\Sigma)$, *d.h. wenn für alle* $\varphi \in \mathrm{Aus}(\mathcal{L})$ *gilt:*

$$\big(\textit{für alle } \mathcal{A} \in M\text{: } \mathcal{A} \vDash \varphi\big) \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vdash \varphi.$$[6]

Andernfalls heißt Σ unvollständig für *M.*

Enthält M nur eine einzige Struktur $\mathcal{A}$, so schreibe ich auch ‚$\mathrm{Th}(\mathcal{A})$' statt ‚$\mathrm{Th}(M)$' und ‚*korrekt* (bzw. *inkorrekt* bzw. *vollständig* bzw. *unvollständig*) *für* $\mathcal{A}$' statt ‚… für M'.

Ist M eine nichtleere Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen, so axiomatisiert eine $\mathcal{L}$-Formelmenge Σ deren Theorie $\mathrm{Th}(M)$ offenbar genau dann, wenn Σ korrekt und vollständig für M ist.

Manchmal ist der Korrektheitsbegriff weniger nützlich, weil noch unklar ist, wie die betrachteten Strukturen überhaupt beschaffen sein sollen. So legen wir etwa durch die Wahl von Axiomen für die Mengenlehre teilweise erst fest, was für Eigenschaften Mengen eigentlich haben sollen. In solchen Fällen hält man sich besser an den schwächeren Begriff der Widerspruchsfreiheit.

In Abb. 1 sind die logischen Zusammenhänge zwischen den bekannten und den hier neu eingeführten Korrektheits- und Vollständigkeitsbegriffen sowie dem Begriff der Widerspruchsfreiheit dargestellt. Alle Begriffe sind bezogen auf ein

[4] In dem Spezialfall, daß diese Theorie *vollständig* ist (d.h. für alle $\varphi \in \mathrm{Aus}(\mathcal{L})$: $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$), z.B. weil sie die Theorie einer einzelnen Struktur (z.B. der natürlichen Zahlen) ist, bedeutet das, daß man Aussagen beweisen kann, die in der betrachteten Theorie (bzw. Struktur) *falsch* sind. Für eine $\mathcal{L}$-Aussage φ und eine $\mathcal{L}$-Theorie T bedeutet jedoch $\varphi \notin T$ i.a. nicht, daß φ „falsch" ist ($\neg\varphi \in T$), denn es ist auch der Fall möglich, daß T unvollständig und φ in T schlichtweg *unentscheidbar* ist ($\varphi, \neg\varphi \notin T$).

[5] $\mathrm{Th}(M) := \{\, \varphi \in \mathrm{Aus}(\mathcal{L}) \mid \text{für alle } \mathcal{A} \in M\text{: } \mathcal{A} \vDash \varphi \,\}$ heißt *die Theorie von M*.

[6] Wohingegen Σ „an sich" vollständig genau dann ist, wenn für alle $\varphi \in \mathrm{Aus}(\mathcal{L})$ gilt: $\Sigma \vdash \varphi$ oder $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

$$\begin{tikzcd}
\text{korrekt für } M \arrow[d] & \\
\text{korrekt für } \mathcal{A} \arrow[d] & \text{vollständig für } \mathcal{A} \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\
\text{widerspruchsfrei} \arrow[u, bend left, "(\text{v.f.}\mathcal{A})"] & \text{vollständig} \arrow[u, bend left, "(\text{k.f.}\mathcal{A})"] \arrow[d, "(\text{k.f.}\mathcal{A})"'] \\
& \text{vollständig für } M
\end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Logische Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Korrektheits- und Vollständigkeitsbegriffen

$\Sigma \subset \mathrm{Fml}(\mathcal{L})$, wobei vorausgesetzt wird, daß M eine Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen ist, die $\mathcal{A}$ als Element enthält. Pfeile stehen für Implikation, und die Abkürzungen neben den Pfeilen geben jeweils Bedingungen an, unter denen das Zutreffen eines Begriffes auf Σ das eines anderen impliziert (‚v.f.$\mathcal{A}$' heißt: ‚vollständig für $\mathcal{A}$' und ‚k.f.$\mathcal{A}$' analog ‚korrekt für $\mathcal{A}$'). Wir beweisen hier als Beispiel nur eine dieser Beziehungen.

Bemerkung 1 *Ist $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, so sind alle vollständigen und für $\mathcal{A}$ korrekten $\Sigma \subset \mathrm{Fml}(\mathcal{L})$ schon vollständig für $\mathcal{A}$.*

Beweis: Nehmen wir an, unter den obigen Voraussetzungen sei Σ unvollständig für $\mathcal{A}$. D.h. es gibt ein $\alpha \in \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ mit $\Sigma \nvdash \alpha$. Da Σ vollständig ist, muß gelten: $\Sigma \vdash \neg\alpha$. Daraus folgt aber $\mathcal{A} \vDash \neg\alpha$, da Σ korrekt für $\mathcal{A}$ ist. Damit haben wir $\mathcal{A} \nvDash \alpha$ und $\mathcal{A} \vDash \alpha$, was ein Widerspruch ist. *qed*

Die übrigen Beziehungen sind genau so leicht zu beweisen.

I.a. ist es einfacher, eine Menge von Axiomen für eine Klasse von Strukturen korrekt zu halten, als deren Vollständigkeit zu erreichen. Darüber spricht der GUS.

1.3 Was der Satz besagt

Die wichtigste Frage, auf die der GUS eine Antwort gibt, ist der dritte Punkt des Hilbertschen Programms:

> Ist es möglich, die gesamte Mathematik in ein handliches Axiomensystem zu packen?

oder, genauer gesagt:

> Gibt es eine entscheidbare Axiomatisierung für die gesamte Mathematik?

Angenommen, die Antwort auf diese Frage wäre *Ja* und wir hätten solch eine Axiomatisierung, so könnte theoretisch ein Computer für jede gewünschte Aussage φ (beispielsweise die Fermatsche Vermutung) in endlicher Zeit berechnen, ob sie wahr oder falsch ist. Warum dies?

Wir können die gesamte Mathematik in der (abzählbaren) Sprache der Mengenlehre formulieren (Punkt 1 des Hilbertschen Programms); d.h. die Menge der mathematischen Aussagen ist entscheidbar. Weiter können wir alles, was in der Mathematik an Logik benötigt wird, in einer entscheidbaren (bzw. rekursiven) Menge logischer Axiome und Schlußregeln zusammenfassen (Punkt 2 des Hilbertschen Programms und Gödelscher Vollständigkeitssatz); d.h. die Menge der formalen Beweise ist rekursiv, *sofern* die Axiomatisierung der Mathematik entscheidbar ist. Damit sind wir bei Punkt 3 des Hilbertschen Programms: Gibt es eine entscheidbare Axiomatisierung für die gesamte Mathematik? Wäre eine solche gegeben, so gäbe es aufgrund ihrer Vollständigkeit einen Beweis für φ oder für $\neg\varphi$, und es könnte wegen der Korrektheit der Axiomatisierung nicht für *beide* Beweise geben. Ein geeignet mit Sprache, Logik und mathematischen Axiomen programmierter Computer könnte also nacheinander alle möglichen Beweise durchgehen und würde den gesuchten früher oder später tatsächlich finden. (In der Praxis würde das natürlich unbrauchbar lange dauern.)

Die Antwort lautet jedoch *Nein.* Genauer besagt der GUS, daß es für keine mathematische Theorie, die so stark ist, daß ihr eigener Beweisbegriff in ihr repräsentiert werden kann, eine entscheidbare Axiomatisierung gibt. Was wir beweisen werden, ist:

Satz 2 (Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz, 1931) *Jede entscheidbare, für $\mathcal{N}$ korrekte $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formelmenge $\Sigma_{\mathcal{N}}$, die die Peano-Axiome enthält, ist unvollständig für $\mathcal{N}$ und sogar unvollständig überhaupt.*

Man kann sich denken, daß der Satz nicht aus trivialen Gründen gelten soll. Wir werden sehen, daß die Menge der Peano-Axiome entscheidbar ist (es also entscheidbare $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formelmengen $\Sigma_{\mathcal{N}}$, die die Peano-Axiome enthalten, *gibt*) und $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ tatsächlich im oben erwähnten Sinne stark genug ist.

Das Hilbertsche Programm hat noch einen vierten Punkt, nämlich die Frage, ob für eine Axiomatisierung (eines Teilbereiches) der Mathematik mit ihren eigenen Mitteln bewiesen werden kann, daß sie widerspruchsfrei ist. Die (wiederum negative) Antwort auf diese Frage gibt der *zweite* Gödelsche Unvollständigkeitssatz: Kann aus einem Axiomensystem eine Aussage abgeleitet werden, die dessen Widerspruchsfreiheit behauptet, so muß dieses Axiomensystem widerspruchsvoll sein. Der strenge Beweis dieses Satzes ist noch weitaus komplizierter als der des ersten Unvollständigkeitssatzes. Der Nichtexperte kann jedoch mit Hilfe von [FUn] auf unterhaltsame Weise einen Eindruck vom Inhalt des zweiten Unvollständigkeitssatzes gewinnen.

2 Wie der Beweis funktioniert

Wir gehen davon aus, daß wir ein entscheidbares, für $\mathcal{N}$ korrektes Axiomensystem $\Sigma_{\mathcal{N}}$ für Th($\mathcal{N}$) besitzen, das die Peano-Axiome enthält. Der Beweis dafür, daß $\Sigma_{\mathcal{N}}$ unvollständig für $\mathcal{N}$ ist, wird dadurch erbracht, daß wir eine $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Aussage γ konstruieren, die besagt:

> Ich bin aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ nicht ableitbar.[7]

Nehmen wir an, γ wäre aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ ableitbar. Dann wäre die Aussage falsch, denn sie besagt ja gerade, daß dies *nicht* der Fall ist. Falsche Aussagen können wir aber aus unserem für $\mathcal{N}$ korrekten Axiomensystem nicht ableiten. Also ist γ doch nicht aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ ableitbar. Damit aber ist γ wahr. Das heißt, wir haben eine in $\mathcal{N}$ gültige Aussage, die aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ nicht ableitbar ist, und das beweist unsere Behauptung. Dies ist die erste wichtige Idee, die dem GUS zugrundeliegt: Wenn wir zu einem gegebenen für eine Struktur korrekten Axiomensystem eine Aussage konstruieren können, die gerade ihre Nichtbeweisbarkeit aus diesem System behauptet, so haben wir damit dessen Unvollständigkeit für diese Struktur gezeigt.

Die Schwierigkeit besteht in der Konstruktion einer solchen Aussage. Die Aussage γ soll von sich selbst besagen, daß sie nicht ableitbar ist; hier soll also eine $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formel *über* eine $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formel sprechen. $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formeln sprechen aber zunächst einmal nur über natürliche Zahlen, nicht über Formeln. Die Lösung dieses Problems besteht darin, daß wir unsere ganze *Logik* der Arithmetik in die *Arithmetik* übersetzen, so daß wir gewissermaßen in dieser ein isomorphes Abbild von jener erhalten. Bestimmte natürliche Zahlen stehen dann für logische Objekte (Terme, Formeln, Beweise), und wir können bestimmte komplizierte arithmetische Funktionen und Eigenschaften anstelle syntaktischer Funktionen (wie der Substitution) und logischer Eigenschaften (wie Ableitbarkeit) betrachten.

Können wir nun diese Funktionen und Relationen wiederum in der Sprache der Arithmetik formalisieren[8] (d.h. *repräsentieren* im Sinne des Repräsentierbarkeitssatzes), so haben wir den Kreis geschlossen: Wir haben Formeln beigebracht, *über Formeln* zu sprechen.

Man kann sich diese Übersetzungsvorgänge als ein Hin- und Herspringen zwischen drei Ebenen veranschaulichen: Die oberste Ebene ist die der üblichen *Mathematik*, wo wir informell, in der Metasprache, u.a. über natürliche Zahlen reden. Diese Ebene nenne ich M wie ‚Mathematik' oder ‚Metaebene'.

Zu vielen metasprachlichen Objekten, Begriffen, Beziehungen, Sachverhalten gibt es Entsprechungen auf der formalen, *objektsprachlichen* Ebene, die ich mit F bezeichnen will. So steht etwa die Konstante $\underline{\mathtt{0}}$ für die Zahl 0, und die Addition wird durch bestimmte Formeln oder Terme repräsentiert.

Durch unser Übersetzungs- oder Codierungsverfahren können wir nun diesen Gegenständen der formalen Ebene F natürliche Zahlen als Codenummern zuordnen, ihre *Gödelnummern*. Wenn wir durch Bezugnahme auf solche Zahlen und

[7] Diese Aussage ist verwandt mit der sogenannten *Lügner-Antinomie* von Epimenides, dem Kreter, der sagt: ‚Alle Kreter lügen.' Kürzer kann man die Antinomie in dem Satz fassen: ‚Dieser Satz ist falsch.' *Unsere* Aussage ist jedoch vergleichsweise unproblematisch.

[8] An dieser Stelle wird dann übrigens die Entscheidbarkeit des Axiomensystems eingehen.

ihre „arithmetischen“ Eigenschaften in Wirklichkeit über Formeln und ihre formallogischen Eigenschaften sprechen, befinden wir uns auf der „Gödel-Ebene“ G. Diese als Arithmetik verklausulierte Logik ist aber wiederum Teil der Arithmetik und damit der Metaebene M. Die Arithmetik (bzw. ihre Logik) in dieser Weise in sich selbst hineinzustopfen, ist der zweite wichtige Grundgedanke des GUS.

Das F-Objekt γ kann sich also auf sich selbst beziehen (das nennt man *Selbstreferenz*), indem es sich auf seine Gödelnummer bezieht und dieser die G-Eigenschaft abspricht, Codenummer einer ableitbaren Formel zu sein. Hier begegnen wir aber einer zweiten Schwierigkeit. Wenn wir die Codenummer von γ in γ selbst hineinschreiben wollen, verfallen wir offenbar in einen infiniten Regreß: Es scheint, als müßten wir, bevor wir γ codieren können, erst einmal γ inklusive seiner darin vorkommenden Gödelnummer hingeschrieben haben; dazu aber müßten wir den Code vor dem Hinschreiben schon kennen!

Eine analoge, fast genau so schwierige Übung in der natürlichen Sprache ist es, in einem Satz aufzuzählen, welche Zeichen er in welcher Anzahl enthält. Schreibt man z.B. zusätzlich in einen Satz die Worte ‚siebzehn e's‘ hinein, so erhöht das die e-Zahl des Satzes um drei, so daß man also stattdessen eintragen müßte: ‚zwanzig e's‘ – wenn die e-Zahl dadurch nicht auf achtzehn sinken würde. Dieses Problem ist aber nicht prinzipiell unlösbar, wie das folgende Beispiel von Lee Sallows [MeT, S. 27] zeigt:

> Only the fool would take trouble to verify that his sentence was composed of ten a's, three b's, four c's, four d's, forty-six e's, sixteen f's, four g's, thirteen h's, fifteen i's, two k's, nine l's, four m's, twenty-five n's, twenty-four o's, five p's, sixteen r's, forty-one s's, thirty-seven t's, ten u's, eight v's, eight w's, four x's, eleven y's, twenty-seven commas, twenty-three apostrophes, seven hyphens, and, last but not least, a single !

Die obenerwähnten Probleme kann man anhand natürlichsprachiger Beispiele folgendermaßen illustrieren. Was wir möchten, ist ein Satz, der besagt:

> Ich bin nicht ableitbar.

Wir haben jedoch in unserer formalen Sprache keine Ausdrucksmittel für ‚ich‘ oder ‚diese Aussage‘, deswegen ist die nächstbeste Idee die, den Satz in sich selbst zu benennen, d.h. zu zitieren:

> Der Satz „Der Satz ‚Der Satz [...] ist nicht ableitbar.‘ ist nicht ableitbar.“ ist nicht ableitbar.

Das geht selbstverständlich so weder in der natürlichen noch in unserer formalen Sprache, wie ich schon weiter oben angedeutet habe. Was geht, ist, innerhalb des Satzes eine *Konstruktionsvorschrift* anzugeben, bei deren Befolgung man schließlich den Satz selber wieder erhält:

> ‚ergibt eine unbeweisbare Aussage, wenn es in Anführungsstriche gesetzt sich selbst vorausgeht.‘ ergibt eine unbeweisbare Aussage, wenn es in Anführungsstriche gesetzt sich selbst vorausgeht.

Dieses Verfahren ist der dritte entscheidende Punkt beim Beweis des Satzes. Wie das in unserer formalen Sprache funktioniert, werden wir in Abschnitt 5 sehen.

3 Die verwendete Logik

Ich beschreibe zunächst die hier verwendete formale Logik im allgemeinen und die der Arithmetik im speziellen. Die Ausführlichkeit, in der das geschieht, mag überraschen, da außer der ungewohnten Syntax kaum etwas Neues vorkommt; sie ist aber gerechtfertigt, da wir später für unseren ersten Übersetzungsschritt (von F nach G) eine detaillierte Darstellung der formallogischen Begriffe benötigen.

3.1 Die Syntax

Die hier verwendete Syntax (eine Variante der sogenannten *polnischen Notation*) ist gerade so gewählt, daß die Übersetzung von F nach G möglichst unkompliziert wird, z.B. dadurch, daß stets das erste Zeichen einer Formel das Hauptzeichen ist und kein Ballast in Form unnötiger Hilfszeichen vorkommt. Dadurch wird das Lesen objektsprachlicher Formeln erschwert, aber wir werden hier ohnehin kaum längeren rein objektsprachlichen Formeln begegnen.

Wir benutzen drei Sorten von Grundzeichen:

logische Zeichen: $\underline{\neg}$, $\underline{\rightarrow}$, $\underline{\forall}$, $\underline{\doteq}$ (Die übrigen Zeichen (‚$\wedge$', ‚$\vee$', ‚$\leftrightarrow$', ‚$\exists$') werden später mit Hilfe dieser Grundzeichen über metasprachliche Abkürzungen eingeführt.)

Variablenzeichen: $\underline{\mathtt{v}}$

Hilfszeichen: $\underline{'}$ (Ein Komma oder Klammern werden nicht benötigt.)

Die weiteren Zeichen werden durch die jeweilige Sprache $\mathcal{L} = (\lambda, \mu, K)$ festgelegt, wobei λ: $I \to \mathbb{N}$, μ: $J \to \mathbb{N}$, und I, J und K Mengen sind. (Im Falle von $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$: $\lambda := \{(0, 2)\}$, $\mu := \{(0, 2), (1, 2)\}$, $K := \{0, 1\}$.) Dabei sei jeweils R_i für $i \in I$ ein $\lambda(i)$-stelliges Relationszeichen, f_j für $j \in J$ ein $\mu(j)$-stelliges Funktionszeichen und c_k für $k \in K$ eine Konstante. (Es darf nicht $f_j = \underline{\mathtt{v}}$ oder $c_k = \underline{\mathtt{v}}$ vorkommen.)

Im folgenden werden durch induktive Definitionen die syntaktischen Grundbegriffe eingeführt:

Variablen:

1. $\underline{\mathtt{v}}$ ist eine Variable.
2. Ist x eine Variable, so ist auch $\underline{'}x$ eine Variable.
3. Keine weiteren Zeichenreihen sind Variablen.

Vbl sei die Menge aller Variablen. Wir kürzen

$$\underbrace{\underline{'}\,\underline{'}\ldots\underline{'}}_{n\text{-mal}}\underline{\mathtt{v}}$$

metasprachlich auch als ‚$\mathtt{v}_n$' ab.

Konstanten: $\mathcal{L}$-Konstanten sind gerade die c_k mit $k \in K$. (Im Falle von $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$: $c_0 := \underline{\mathtt{0}}$, $c_1 := \underline{\mathtt{1}}$.)

Terme:

1. Alle Variablen und $\mathcal{L}$-Konstanten sind $\mathcal{L}$-Terme.
2. Ist $j \in J$, und sind $t_1, t_2, \ldots, t_{\mu(j)}$ $\mathcal{L}$-Terme, so ist auch $f_j t_1 t_2 \ldots t_{\mu(j)}$ ein $\mathcal{L}$-Term. (Im Falle von $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$: $f_0 := \underline{+}$, $f_1 := \underline{\cdot}$. Zusammengesetzte Terme haben hier also die Gestalt $\underline{+} t_1 t_2$ oder $\underline{\cdot} t_1 t_2$.)
3. Keine weiteren Zeichenreihen sind $\mathcal{L}$-Terme.

$\mathrm{Tm}(\mathcal{L})$ sei die Menge aller $\mathcal{L}$-Terme. Ein einer natürlichen Zahl n entsprechender $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Term ist z.B.:

$$\underbrace{\underline{+}\underline{\mathtt{1}}\,\underline{+}\underline{\mathtt{1}} \ldots \underline{+}\underline{\mathtt{1}}}_{n\text{-mal}}\,\underline{\mathtt{0}} =: \mathrm{k}_n.$$

Primformeln:

1. Sind t_1 und t_2 $\mathcal{L}$-Terme, so ist $\underline{\doteq} t_1 t_2$ eine $\mathcal{L}$-Primformel.
2. Ist $i \in I$, und sind $t_1, t_2, \ldots, t_{\lambda(i)}$ $\mathcal{L}$-Terme, so ist $R_i t_1 t_2 \ldots t_{\lambda(i)}$ eine $\mathcal{L}$-Primformel. (Im Falle von $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$: $R_0 := \underline{\leq}$. $\mathcal{L}$-Primformeln haben hier also die Gestalt $\underline{\doteq} t_1 t_2$ oder $\underline{\leq} t_1 t_2$.)
3. Keine weiteren Zeichenreihen sind $\mathcal{L}$-Primformeln.

Formeln:

1. Alle $\mathcal{L}$-Primformeln sind $\mathcal{L}$-Formeln.
2. Sind φ und ψ $\mathcal{L}$-Formeln, und ist x eine Variable, so sind auch $\underline{\neg}\varphi$, $\underline{\rightarrow}\varphi\psi$ und $\underline{\forall} x \varphi$ $\mathcal{L}$-Formeln.
3. Keine weiteren Zeichenreihen sind $\mathcal{L}$-Formeln.

$\mathrm{Fml}(\mathcal{L})$ sei die Menge aller $\mathcal{L}$-Formeln.

$\mathcal{L}$-Bezeichner sind gerade die $\mathcal{L}$-Terme und $\mathcal{L}$-Formeln.

Zeichen der Stelligkeit $\begin{cases} 0: & \underline{\mathtt{v}} \text{ und alle Konstanten,} \\ 1: & \underline{\neg},\ \underline{'}, \\ 2: & \underline{\rightarrow},\ \underline{\forall},\ \underline{\doteq}. \end{cases}$

Weiterhin ist für $i \in I$ jeweils R_i ein Zeichen der Stelligkeit $\lambda(i)$, und für $j \in J$ jeweils f_j eines der Stelligkeit $\mu(j)$. (Im Falle von $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ sind also $\underline{\mathtt{0}}$ und $\underline{\mathtt{1}}$ Zeichen der Stelligkeit 0, und $\underline{+}$, $\underline{\cdot}$ und $\underline{\leq}$ solche der Stelligkeit 2.)

Man mache sich klar, daß in dieser Syntax auch ohne Komma und Klammern für jede Zeichenreihe eindeutig bestimmt ist, wie und aus welchen Termen und Formeln sie aufgebaut ist; das heißt z.B. für Formeln φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2, daß

$\underline{\to}\varphi_1\psi_1 = \underline{\to}\varphi_2\psi_2$ stets $\varphi_1 = \varphi_2$ und $\psi_1 = \psi_2$ impliziert. Denn es ist für jedes Zeichen eindeutig festgelegt, welche Stelligkeit es hat und ob an einer gegebenen „Argumentstelle" ein Term oder eine Formel zu stehen hat. Man kann leicht einen Beweis via Induktion über Term- und Formelaufbau führen, der zeigt, daß für jede syntaktisch korrekt gebildete Zeichenreihe der Sprache eindeutig bestimmt ist, wo ein darin einmal begonnener Bezeichner wieder endet. Danach beginnt dann ggf. der nächste Bezeichner, sofern noch „Argumentstellen" ausstehen. Damit sind Trennungszeichen überflüssig.

Wir können nun Konjunktion, Disjunktion, Bikonditional und Existenzquantor einführen:

$$\begin{aligned}
\varphi \wedge \psi &:= \underline{\neg}\,\underline{\to}\,\varphi\,\underline{\neg}\psi && (\mathrel{\widehat{=}}\ \neg(\varphi \to \neg\psi)),\\
\varphi \vee \psi &:= \underline{\neg}\big((\underline{\neg}\varphi) \wedge (\underline{\neg}\psi)\big),\\
\varphi \leftrightarrow \psi &:= (\underline{\to}\varphi\psi) \wedge (\underline{\to}\psi\varphi) && (\mathrel{\widehat{=}}\ (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)),\\
\exists x &:= \underline{\neg\forall} x \underline{\neg}.
\end{aligned}$$

3.2 Die Axiome

Statt einzelner Axiome benutze ich überall Axiomen*schemata*, weil hier in diesem Punkt durch Sparsamkeit nichts zu gewinnen wäre, obwohl das zumindest bei den identitätslogischen und den Peano-Axiomen (das Induktions‚axiom' ausgenommen) nicht notwendig wäre.

Ich gebe die Axiome zunächst der besseren Lesbarkeit halber in der gebräuchlichen Schreibweise an, dann eventuell (in der gebräuchlichen Schreibweise) unter ausschließlicher Verwendung der Grundzeichen $\underline{\neg}, \underline{\to}, \underline{\forall}, \underline{\doteq}, \underline{\mathrm{v}}, \underline{'}$, c_k $(k \in K)$, f_j $(j \in J)$ und R_i $(i \in I)$ und schließlich noch streng nach den Vorschriften der im vorigen Abschnitt eingeführten Syntax, in welcher Form wir sie später für die Übersetzung von F nach G brauchen werden.

Aussagenlogische Axiome sind die $\mathcal{L}$-Formeln der Gestalten

(A$_1$) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$ (ex quolibet verum)
$\big($genauer: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;
ganz streng: $\underline{\to}\,\varphi\,\underline{\to}\psi\varphi\big)$,

(A$_2$) $\big(\varphi \to (\psi \to \chi) \wedge \psi\big) \to (\varphi \to \chi)$ (MP-ähnlich)
$\big(\mathrel{\widehat{=}}\ (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
$\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\to}\,\underline{\to}\,\varphi\,\underline{\to}\psi\chi\,\underline{\to}\,\underline{\to}\varphi\psi\,\underline{\to}\varphi\chi\big)$,

(A$_3$) $\varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$ (ex falso quodlibet)
$\big(\mathrel{\widehat{=}}\ \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$
$\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\to}\,\varphi\,\underline{\to}\,\underline{\neg}\varphi\,\psi\big)$,

(A$_4$) $(\varphi \vee \neg\varphi \to \psi) \to \psi$ (Dilemma)
$\big(\mathrel{\widehat{=}}\ (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi)$
$\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\to}\,\underline{\to}\varphi\psi\,\underline{\to}\,\underline{\to}\,\underline{\neg}\varphi\,\psi\,\psi\big)$,

wenn φ, ψ und χ $\mathcal{L}$-Formeln sind.

Man kann zeigen (s. [Frd]), daß diese Axiomatisierung der Aussagenlogik genau gleichstark wie die in [Pr] ist, wo als aussagenlogische Axiome alle (Einsetzungsinstanzen von) aussagenlogischen Tautologien gewählt werden. Die übrigen hier angegebenen logischen und nichtlogischen Axiome sowie Schlußregeln folgen [Pr].

Quantorenlogische Axiome sind die $\mathcal{L}$-Formeln der Gestalten

(Q$_1$) $\forall x\varphi \to \varphi(x/t)$ (Spezialisierung)
$(\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\to}\,\underline{\forall}x\varphi\,\varphi(x/t))$
wenn φ eine $\mathcal{L}$-Formel, x eine Variable und t ein $\mathcal{L}$-Term ist, und t frei für x in φ ist,

(Q$_2$) $\forall x(\varphi \to \psi) \;\to\; (\varphi \to \forall x\psi)$
$(\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\to}\,\underline{\forall}x\,\underline{\to}\varphi\psi\,\underline{\to}\,\varphi\,\underline{\forall}x\psi)$
wenn φ und ψ Formeln der Sprache $\mathcal{L}$ sind und x eine Variable ist, die in φ nicht frei vorkommt.

Identitätslogische Axiome: Ist $i \in I$, $j \in J$, sind x, y, z Variablen, u_1, u_2, …, $u_{\lambda(i)}$ paarweise verschiedene Variablen, w_1, w_2, …, $w_{\mu(j)}$ paarweise verschiedene Variablen, $l \in [\lambda(i)]$ und $m \in [\mu(j)]$, so sind

(I$_1$) $x \doteq x$ (Reflexivität)
$(\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\doteq}xx)$,

(I$_2$) $x\doteq y \wedge x\doteq z \;\to\; y\doteq z$ (Transitivität)
$\big(\mathrel{\widehat{=}}\ x\doteq y \to (x\doteq z \to y\doteq z)$,
$\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\to}\,\underline{\doteq}xy\,\underline{\to}\,\underline{\doteq}xz\,\underline{\doteq}yz\big)$,

(I$_3$) $x\doteq y \wedge R_i(u_1,u_2,\dots,u_{\lambda(i)})(u_l/x) \;\to\; R_i(u_1,u_2,\dots,u_{\lambda(i)})(u_l/y)$
(Ersetzung von Gleichem I)
$\big(\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\to}\,\underline{\doteq}xy\,\underline{\to}\,(R_iu_1u_2\dots u_{\lambda(i)})(u_l/x)\,(R_iu_1u_2\dots u_{\lambda(i)})(u_l/y)\big)$,

(I$_4$) $x\doteq y \to f_j(w_1,w_2,\dots,w_{\mu(j)})(w_m/x) \doteq f_j(w_1,w_2,\dots,w_{\mu(j)})(w_m/y)$
(Ersetzung von Gleichem II)
$\big(\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\to}\,\underline{\doteq}xy\,\underline{\doteq}\,(f_jw_1w_2\dots w_{\mu(j)})(w_m/x)\,(f_jw_1w_2\dots w_{\mu(j)})(w_m/y)\big)$,

identitätslogische Axiome.

Im Falle von $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ nehmen wir als **nichtlogische Axiome** die Peano-Axiome der Arithmetik hinzu, d.h. für alle Variablen x und y und alle $\varphi \in \mathrm{Fml}(\mathcal{L})$:

(P$_1$) $x+\mathtt{1} \neq \mathtt{0}$ (Null)
$(\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\neg}\,\underline{\doteq}\,\underline{+}x\underline{\mathtt{1}}\,\underline{\mathtt{0}})$,

(P$_2$) $x+\mathtt{1} \doteq y+\mathtt{1} \;\to\; x\doteq y$ (Nachfolger)
$(\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\to}\,\underline{\doteq}\,\underline{+}x\underline{\mathtt{1}}\,\underline{+}y\underline{\mathtt{1}}\,\underline{\doteq}xy)$,

(P$_3$) $x+\mathtt{0} \doteq x$ (Neutralelement)
$(\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\doteq}\,\underline{+}x\underline{\mathtt{0}}\,x)$,

(P$_4$) $x + (y+\mathtt{1}) \doteq (x+y) + \mathtt{1}$ (Assoziativität)
$(\mathrel{\widehat{=}}\ \underline{\doteq}\,\underline{+}\,x\,\underline{+}y\underline{\mathtt{1}}\,\underline{+}\,\underline{+}xy\,\underline{\mathtt{1}})$,

(P$_5$) $x\cdot\mathtt{0} \doteq \mathtt{0}$ (Multiplikation)
($\widehat{=}$ $\underline{\doteq}\,\underline{\cdot}\,x\underline{\mathtt{0}}\,\underline{\mathtt{0}}$),

(P$_6$) $x \cdot (y+\mathtt{1}) \doteq x\cdot y + x$ (Distributivität)
($\widehat{=}$ $\underline{\doteq}\,\underline{\cdot}\,x\,\underline{+}y\underline{\mathtt{1}}\,\underline{+}\,\underline{\cdot}xy\,x$),

(P$_7$) $\varphi(x/\mathtt{0}) \wedge \forall x(\varphi \to \varphi(x/x+\mathtt{1})) \to \varphi$ (Induktion)
($\widehat{=}$ $\underline{\to}\,\varphi(x/\underline{\mathtt{0}})\,\underline{\to}\,\underline{\forall}x\,\underline{\to}\,\varphi\,\varphi(x/\underline{+}x\underline{\mathtt{1}})\,\varphi$).

Wir beschäftigen uns mit Axiomensystemen für die Arithmetik, die die Peano-Axiome enthalten. Es ist egal, ob und was diese Axiomensysteme über die Peano-Axiome hinaus enthalten (solange sie korrekt für $\mathcal{N}$ sind), daher bezeichne ich die im folgenden als gegeben angenommene Menge nichtlogischer Axiome für Th($\mathcal{N}$) einfach mit ‚$\Sigma_{\mathcal{N}}$‘.

3.3 Die logischen Regeln

Modus ponens: Für alle $\mathcal{L}$-Formeln φ und ψ: $\dfrac{\begin{array}{c}\underline{\to}\varphi\psi\\ \varphi\end{array}}{\psi}$

Generalisierungsregel: Für alle $\mathcal{L}$-Formeln φ und alle Variablen x: $\dfrac{\varphi}{\underline{\forall}x\varphi}$

4 Die „Repräsentation“ der Logik in der Arithmetik

Ich gebe nun, wie angekündigt, eine Übersetzung der formallogischen Ebene F in die Codeebene G an.

4.1 Gödelnummern

Einzelnen Zeichen werden über die Funktion SN Zahlen zugeordnet, ihre *Symbolnummern*. Bezeichner werden ihrem Aufbau folgend induktiv aufgedröselt und sukzessive in Zahlen übersetzt, die *Gödelnummern* der Bezeichner. Dies geschieht mit Hilfe der zu Beginn erwähnten Folgennummern.

$$\textbf{SN:}\quad \begin{array}{ccc|ccc}
\underline{\neg} & \mapsto & 1 & \underline{\doteq} & \mapsto & 4\\
\underline{\to} & \mapsto & 2 & \underline{\mathrm{v}} & \mapsto & 5\\
\underline{\forall} & \mapsto & 3 & \underline{'} & \mapsto & 6
\end{array}\quad
\underbrace{\begin{array}{ccc|ccc}
\underline{\leq} & \mapsto & 7 & \underline{\mathtt{0}} & \mapsto & 10\\
\underline{+} & \mapsto & 8 & \underline{\mathtt{1}} & \mapsto & 11\\
\underline{\cdot} & \mapsto & 9 & & &
\end{array}}_{\text{für Th}(\mathcal{N})}$$

Bezeichner haben die Gestalt $\sigma\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$, wobei σ ein Zeichen der Stelligkeit n ist und β_1, β_2, …, β_n wiederum Bezeichner sind. (Im Falle von Th($\mathcal{N}$) ist dabei stets $n \leq 2$.)

$$\textbf{Gödelnummer}\text{ von } \sigma\beta_1\beta_2\ldots\beta_n \;:=\; \ulcorner\sigma\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\urcorner$$
$$:= \big\langle \mathrm{SN}(\sigma), \ulcorner\beta_1\urcorner, \ulcorner\beta_2\urcorner, \ldots, \ulcorner\beta_n\urcorner \big\rangle$$

Man mache sich bewußt, daß die so definierte Gödelnummer eines Bezeichners dessen Struktur widerspiegelt; d.h. wenn wir eine Gödelnummer in die einzelnen Glieder der codierten Folge auflösen, so erhalten wir nicht etwa die Folge der Symbolnummern der *einzelnen Zeichen*, sondern die Symbolnummer des *Hauptzeichens*, gefolgt von den Gödelnummern der im syntaktischen Aufbau des Bezeichners *„nächstkleineren“ Bezeichner*.

4.2 „Arithmetisierung“ der Logik (F → G)

Wir definieren jetzt – oft induktiv – einige (i.a. rekursive) arithmetische Prädikate und Funktionen, die jeweils metasprachlichen syntaktisch-logischen Prädikaten bzw. Funktionen entsprechen.[9] Man kann diese Definitionen jeweils mit den entsprechenden Definitionen in Abschnitt 3 vergleichen. Verstehen können wird man sie ohne diese Gegenüberstellung sowieso kaum. Von den durch die Codierung bedingten Eigentümlichkeiten abgesehen, entsprechen sich diese Definitionen meist ziemlich detailliert.

$$\mathrm{Var}(n) \quad :\Leftrightarrow \quad n = \langle \mathrm{SN}(\underline{v})\rangle \ \text{ oder } \ \big[n = \big\langle \mathrm{SN}(\underline{'}), (n)_1\big\rangle \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_1)\big].$$

Var trifft genau auf diejenigen natürlichen Zahlen zu, die Gödelnummern von Variablen sind.
n ist Gödelnummer eines Terms:

$$\mathrm{Term}_{\mathcal{N}}(n) \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad n = \langle \mathrm{SN}(\underline{0})\rangle \ \text{ oder } \ n = \langle \mathrm{SN}(\underline{1})\rangle \ \text{ oder } \ \mathrm{Var}(n) \\ \text{oder } \big[\quad n = \big\langle (n)_0, (n)_1, (n)_2 \big\rangle \quad \& \quad (n)_0 \in \{\mathrm{SN}(\underline{+}), \mathrm{SN}(\underline{\cdot})\} \\ \quad \& \ \ \mathrm{Term}_{\mathcal{N}}((n)_1) \quad \& \quad \mathrm{Term}_{\mathcal{N}}((n)_2)\big]. \end{cases}$$

Primformel:

$$\mathrm{PFor}_{\mathcal{N}}(n) \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad n = \big\langle (n)_0, (n)_1, (n)_2 \big\rangle \quad \& \quad (n)_0 \in \{\mathrm{SN}(\underline{\doteq}), \mathrm{SN}(\underline{\leq})\} \\ \& \ \ \mathrm{Term}_{\mathcal{N}}((n)_1) \quad \& \quad \mathrm{Term}_{\mathcal{N}}((n)_2). \end{cases}$$

[9] Außer bei Var machen diese Definitionen nur Sinn, wenn zuvor eine konkrete Sprache $\mathcal{L}$ festgelegt wurde. Die Namen derjenigen Prädikate und Funktionen, deren Definition sich ausdrücklich auf Th($\mathcal{N}$) bezieht, sind mit einem Index ‚$\mathcal{N}$‘ versehen. Allgemein hat man sich dazuzudenken, daß z.B. ‚$\mathrm{For}_{\mathcal{N}}$‘ das For entsprechende Prädikat bezeichnet, das sich speziell auf Th($\mathcal{N}$) bezieht, und umgekehrt z.B. PFor das $\mathrm{PFor}_{\mathcal{N}}$ entsprechende Prädikat für eine nicht näher bestimmte Sprache ist. Wo möglich, wurde die allgemeinere Fassung angegeben, ansonsten die $\mathcal{N}$-Fassung. I.a. ist es bei den $\mathcal{N}$-Definitionen leicht, sie für Sprachen mit endlich vielen Relations- und Funktionszeichen und Konstanten abzuändern.

Formel:

$$\mathrm{For}(n) \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad \mathrm{PFor}(n) \\ \text{oder } \big[n = \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\neg}), (n)_1 \big\rangle \quad \& \quad \mathrm{For}((n)_1)\big] \\ \text{oder } \Big[\quad n = \big\langle (n)_0, (n)_1, (n)_2 \big\rangle \quad \& \quad \mathrm{For}((n)_2) \\ \quad \& \ \big(\qquad \big[(n)_0 = \mathrm{SN}(\underline{\rightarrow}) \quad \& \quad \mathrm{For}((n)_1)\big] \\ \qquad \text{oder } \big[(n)_0 = \mathrm{SN}(\underline{\forall}) \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_1)\big]\big)\Big]. \end{cases}$$

Die beiden nächsten Definitionen beziehen sich nur auf Sprachen mit höchstens zweistelligen Relationen und Funktionen, können aber für andere Sprachen leicht verallgemeinert werden.

Sind b, x, t die Gödelnummern eines Bezeichners, einer Variable, respektive eines Terms, so liefert $\mathrm{Sub}(b, x, t)$ die Gödelnummer des Bezeichners, den man durch Substitution des Terms für die Variable in dem Bezeichner erhält; d.h. $\mathrm{Sub}(\ulcorner\beta\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner t\urcorner) = \ulcorner\beta(x/t)\urcorner$.

$$\mathrm{Sub}(b, x, t) \quad := \quad \begin{cases} t & \text{falls } \mathrm{Var}(b) \quad \& \quad b = x, \\ \big\langle (b)_0, \mathrm{Sub}((b)_1, x, t)\big\rangle & \text{falls } b = \big\langle (b)_0, (b)_1 \big\rangle \\ & \& \ \ (b)_0 \neq \mathrm{SN}(\underline{'}) \\ \big\langle (b)_0, \mathrm{Sub}((b)_1, x, t), \mathrm{Sub}((b)_2, x, t)\big\rangle & \text{falls} \\ & b = \big\langle (b)_0, (b)_1, (b)_2 \big\rangle \\ & \& \ \ (b)_0 \neq \mathrm{SN}(\underline{\forall}), \\ \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\forall}), (b)_1, \mathrm{Sub}((b)_2, x, t)\big\rangle & \text{falls} \\ & b = \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\forall}), (b)_1, (b)_2 \big\rangle \\ & \& \ \ (b)_1 \neq x, \\ b & \text{sonst.} \end{cases}$$

„x“ ist frei im Bezeichner „b“:

$$\mathrm{Fr}(x, b) \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad \big[\mathrm{Var}(b) \quad \& \quad x = b\big] \\ \text{oder } \big[b = \langle (b)_0, (b)_1 \rangle \quad \& \quad \mathrm{Fr}(x, (b)_1)\big] \\ \text{oder } \big[\quad b = \big\langle (b)_0, (b)_1, (b)_2 \big\rangle \quad \& \quad (b)_0 \neq \mathrm{SN}(\underline{\forall}) \\ \quad \& \ \big(\mathrm{Fr}(x, (b)_1) \ \text{ oder } \ \mathrm{Fr}(x, (b)_2)\big)\big] \\ \text{oder } \big[b = \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\forall}), (b)_1, (b)_2 \big\rangle \quad \& \quad (b)_1 \neq x \quad \& \quad \mathrm{Fr}(x, (b)_2)\big]. \end{cases}$$

„t“ ist substituierbar (frei) für „x“ in „b“:

$$\mathrm{Sbar}(t, x, b) \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad \big[b = \big\langle (b)_0, (b)_1 \big\rangle \quad \& \quad \mathrm{Sbar}(t, x, (b)_1)\big] \\ \text{oder } \big[\quad b = \big\langle (b)_0, (b)_1, (b)_2 \big\rangle \quad \& \quad (b)_0 \neq \mathrm{SN}(\underline{\forall}) \\ \quad \& \ \mathrm{Sbar}(t, x, (b)_1) \quad \& \quad \mathrm{Sbar}(t, x, (b)_2)\big] \\ \text{oder } \Big[\quad b = \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\forall}), (b)_1, (b)_2 \big\rangle \\ \quad \& \ \Big((b)_1 \neq x \quad \Rightarrow \\ \qquad \text{nicht } \big(\mathrm{Fr}(x, (b)_2) \quad \& \quad \mathrm{Fr}((b)_1, t)\big) \\ \qquad \& \ \mathrm{Sbar}(t, x, (b)_2)\Big)\Big]. \end{cases}$$

Aussagenlogische Axiome:

$$
\mathrm{aAx}(n) \quad :\Leftrightarrow \quad \left\{
\begin{array}{ll}
 & \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), (n)_1, \langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), (n)_{21}, (n)_1 \rangle \Big\rangle \\
 & \quad \&\ \ \mathrm{For}((n)_1) \quad \&\ \ \mathrm{For}((n)_{21}) \Big] \\
\text{oder} & \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), \\
 & \qquad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), (n)_{11}, \langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), (n)_{121}, (n)_{122} \rangle \Big\rangle, \\
 & \qquad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), \\
 & \qquad\quad \langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), (n)_{11}, (n)_{121} \rangle, \\
 & \qquad\quad \langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), (n)_{11}, (n)_{122} \rangle \Big\rangle \Big\rangle \\
 & \quad \&\ \ \mathrm{For}((n)_{11}) \quad \&\ \ \mathrm{For}((n)_{121}) \quad \&\ \ \mathrm{For}((n)_{122}) \Big] \\
\text{oder} & \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), (n)_1, \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), \langle \mathrm{SN}(\underline{\neg}), (n)_1 \rangle, (n)_{22} \Big\rangle \Big\rangle \\
 & \quad \&\ \ \mathrm{For}((n)_1) \quad \&\ \ \mathrm{For}((n)_{22}) \Big] \\
\text{oder} & \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), \\
 & \qquad \langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), (n)_{11}, (n)_{12} \rangle, \\
 & \qquad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), \\
 & \qquad\quad \langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), \langle \mathrm{SN}(\underline{\neg}), (n)_{11} \rangle, (n)_{12} \rangle, \\
 & \qquad\quad (n)_{12} \Big\rangle \Big\rangle \\
 & \quad \&\ \ \mathrm{For}((n)_{11}) \quad \&\ \ \mathrm{For}((n)_{12}) \Big].
\end{array}
\right.
$$

Quantorenlogische Axiome:

$$\mathrm{qAx}(n) \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{ex. } t < n\text{: } \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\rightarrow}), \\ \qquad\qquad \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\forall}), (n)_{11}, (n)_{12} \big\rangle, \\ \qquad\qquad \mathrm{Sub}((n)_{12}, (n)_{11}, t) \Big\rangle \\ \qquad \& \ \mathrm{Var}((n)_{11}) \ \& \ \mathrm{For}((n)_{12}) \ \& \ \mathrm{Term}(t) \\ \qquad \& \ \mathrm{Sbar}(t, (n)_{11}, (n)_{12}) \Big] \\ \text{oder } \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\rightarrow}), \\ \qquad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\forall}), (n)_{11}, \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\rightarrow}), (n)_{121}, (n)_{122} \big\rangle \Big\rangle, \\ \qquad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\rightarrow}), (n)_{121}, \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\forall}), (n)_{11}, (n)_{122} \big\rangle \Big\rangle \Big\rangle \\ \quad \& \ \mathrm{Var}((n)_{11}) \ \& \ \mathrm{For}((n)_{121}) \ \& \ \mathrm{For}((n)_{122}) \\ \quad \& \ \text{nicht } \mathrm{Fr}((n)_{11}, (n)_{121}) \Big]. \end{cases}$$

Diese Definition ist insofern etwas trickreicher als die vorigen, als in ihr eine – allerdings beschränkte – Existenzaussage vorkommt. Das Prädikat qAx „untersucht“ n darauf hin, ob es Gödelnummer einer Instanz eines der beiden Axiomenschemata $(\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2)$ ist. Ist n Gödelnummer einer Instanz von (Q_1), so gibt es einen Term (dessen Gödelnummer t sei) so daß $(n)_2$ das Ergebnis der „Substitution“ von t für $(n)_{11}$ ($\widehat{=}\ x$) in $(n)_{12}$ ($\widehat{=}\ \varphi$) ist. Damit qAx *alle* Instanzen von (Q_1) findet, müssen wir für t im Prinzip alle Gödelnummern von $\mathcal{L}$-Termen zulassen, d.h. beliebig große Zahlen. Würde man dazu jedoch zu Beginn des ersten Falles der Definition eine *unbeschränkte* Existenzaussage für t machen, so wäre qAx nicht mehr rekursiv, da ja i.a. kein solches t existieren wird. Die Einschränkung $t < n$ schließt jedoch nicht wirklich mögliche Fälle aus:

Nehmen wir an, n sei Gödelnummer einer Instanz von (Q_1). Dann kann t zum einen, über Folgencodierung mehr oder weniger tief verschachtelt, in $\mathrm{Sub}((n)_{12}, (n)_{11}, t)$ „vorkommen“; es kann zum anderen aber auch sein, daß t gar nicht darin „enthalten“ ist. Weiter ist $\mathrm{Sub}((n)_{12}, (n)_{11}, t)$, über Folgencodierung einmal verschachtelt, in n „enthalten“. Wenn also t in $\mathrm{Sub}((n)_{12}, (n)_{11}, t)$ „vorkommt“, so gilt aufgrund unserer Bemerkungen über Folgennummern in Abschnitt 0:

$$n > \mathrm{Sub}((n)_{12}, (n)_{11}, t) > t.$$

Wenn hingegen t in $\mathrm{Sub}((n)_{12}, (n)_{11}, t)$ nicht „vorkommt“ (d.h. t ist zwar „frei für“ $(n)_{11}$ in $(n)_1$, wird aber nicht wirklich in $(n)_{12}$ „eingesetzt“, z.B. weil die „Variable“ $(n)_{11}$ in $(n)_{12}$ gar nicht „frei vorkommt“), so ist $\mathrm{Sub}((n)_{12}, (n)_{11}, t) = \mathrm{Sub}((n)_{12}, (n)_{11}, (n)_{11})$ und wir haben wiederum:

$$n > (n)_1 > (n)_{11} =: t',$$

in welchem Falle die Existenzaussage von t' erfüllt wird.

Identitätslogische Axiome für $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$:

$$
\mathrm{iAx}_{\mathcal{N}}(n) \quad :\Leftrightarrow \quad
\left\{
\begin{array}{l}
\quad\ \big[n = \big\langle \mathrm{SN}(\dot{\underline{=}}), (n)_1, (n)_1 \big\rangle \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_1)\big] \\
\text{oder} \ \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), \\
\qquad\qquad\qquad \big\langle \mathrm{SN}(\dot{\underline{=}}), (n)_{11}, (n)_{12} \big\rangle, \\
\qquad\qquad\qquad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), \\
\qquad\qquad\qquad\quad \big\langle \mathrm{SN}(\dot{\underline{=}}), (n)_{11}, (n)_{212} \big\rangle, \\
\qquad\qquad\qquad\quad \big\langle \mathrm{SN}(\dot{\underline{=}}), (n)_{12}, (n)_{212} \big\rangle \Big\rangle \Big\rangle \\
\qquad \& \ \mathrm{Var}((n)_{11}) \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_{12}) \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_{212}) \Big] \\
\text{oder} \ \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), \\
\qquad\qquad\qquad \big\langle \mathrm{SN}(\dot{\underline{=}}), (n)_{11}, (n)_{12} \big\rangle, \\
\qquad\qquad\qquad \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), (n)_{21}, (n)_{22} \big\rangle \Big\rangle \\
\qquad \& \ \Big(\qquad \Big[\quad (n)_{21} = \big\langle \mathrm{SN}(\underline{<}), (n)_{11}, (n)_{212} \big\rangle \\
\qquad\qquad\qquad \& \ (n)_{22} = \big\langle \mathrm{SN}(\underline{<}), (n)_{12}, (n)_{212} \big\rangle \Big] \\
\qquad\qquad \text{oder} \ \Big[\quad (n)_{21} = \big\langle \mathrm{SN}(\underline{<}), (n)_{211}, (n)_{11} \big\rangle \\
\qquad\qquad\qquad \& \ (n)_{22} = \big\langle \mathrm{SN}(\underline{<}), (n)_{211}, (n)_{12} \big\rangle \Big] \Big) \\
\qquad \& \ \mathrm{Var}((n)_{11}) \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_{12}) \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_{211}) \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_{212}) \Big] \\
\text{oder} \ \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), \\
\qquad\qquad\qquad \big\langle \mathrm{SN}(\dot{\underline{=}}), (n)_{11}, (n)_{12} \big\rangle, \\
\qquad\qquad\qquad \big\langle \mathrm{SN}(\dot{\underline{=}}), (n)_{21}, (n)_{22} \big\rangle \Big\rangle \\
\qquad \& \ \Big(\qquad \Big[\quad (n)_{21} = \big\langle (n)_{210}, (n)_{11}, (n)_{212} \big\rangle \\
\qquad\qquad\qquad \& \ (n)_{22} = \big\langle (n)_{210}, (n)_{12}, (n)_{212} \big\rangle \Big] \\
\qquad\qquad \text{oder} \ \Big[\quad (n)_{21} = \big\langle (n)_{210}, (n)_{211}, (n)_{11} \big\rangle \\
\qquad\qquad\qquad \& \ (n)_{22} = \big\langle (n)_{210}, (n)_{211}, (n)_{12} \big\rangle \Big] \Big) \\
\qquad \& \ (n)_{210} \in \{\mathrm{SN}(\underline{+}), \mathrm{SN}(\underline{\cdot})\} \\
\qquad \& \quad\ \mathrm{Var}((n)_{11}) \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_{12}) \\
\qquad\quad \& \ \mathrm{Var}((n)_{211}) \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_{212}) \Big].
\end{array}
\right.
$$

Peano-Axiome:

$$
\mathrm{nlAx}_{\mathcal{N}}(n) \quad :\Leftrightarrow \quad
\left\{
\begin{array}{ll}
 & \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\neg}), \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\dot{=}}), \big\langle \mathrm{SN}(\underline{+}), (n)_{111}, \ulcorner \underline{\mathtt{1}} \urcorner \big\rangle, \ulcorner \underline{\mathtt{0}} \urcorner \Big\rangle \Big\rangle \\
 & \quad \& \;\; \mathrm{Var}((n)_{111}) \Big] \\
\text{oder} & \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\rightarrow}), \\
 & \qquad\qquad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\dot{=}}), \\
 & \qquad\qquad\quad \big\langle \mathrm{SN}(\underline{+}), (n)_{111}, \ulcorner \underline{\mathtt{1}} \urcorner \big\rangle, \\
 & \qquad\qquad\quad \big\langle \mathrm{SN}(\underline{+}), (n)_{121}, \ulcorner \underline{\mathtt{1}} \urcorner \big\rangle \Big\rangle, \\
 & \qquad\qquad \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\dot{=}}), (n)_{111}, (n)_{121} \big\rangle \Big\rangle \\
 & \quad \& \;\; \mathrm{Var}((n)_{111}) \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_{121}) \Big] \\
\text{oder} & \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\dot{=}}), \big\langle \mathrm{SN}(\underline{+}), (n)_{11}, \ulcorner \underline{\mathtt{0}} \urcorner \big\rangle, (n)_{11} \Big\rangle \\
 & \quad \& \;\; \mathrm{Var}((n)_{11}) \Big] \\
\text{oder} & \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\dot{=}}), \\
 & \qquad\qquad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{+}), (n)_{11}, \big\langle \mathrm{SN}(\underline{+}), (n)_{121}, \ulcorner \underline{\mathtt{1}} \urcorner \big\rangle \Big\rangle, \\
 & \qquad\qquad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{+}), \big\langle \mathrm{SN}(\underline{+}), (n)_{11}, (n)_{121} \big\rangle, \ulcorner \underline{\mathtt{1}} \urcorner \Big\rangle \Big\rangle \\
 & \quad \& \;\; \mathrm{Var}((n)_{11}) \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_{121}) \Big] \\
\text{oder} & \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\dot{=}}), \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\cdot}), (n)_{11}, \ulcorner \underline{\mathtt{0}} \urcorner \big\rangle, \ulcorner \underline{\mathtt{0}} \urcorner \Big\rangle \\
 & \quad \& \;\; \mathrm{Var}((n)_{11}) \Big] \\
\text{oder} & \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\dot{=}}), \\
 & \qquad\qquad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\cdot}), (n)_{11}, \big\langle \mathrm{SN}(\underline{+}), (n)_{121}, \ulcorner \underline{\mathtt{1}} \urcorner \big\rangle \Big\rangle, \\
 & \qquad\qquad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{+}), \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\cdot}), (n)_{11}, (n)_{121} \big\rangle, (n)_{11} \Big\rangle \Big\rangle \\
 & \quad \& \;\; \mathrm{Var}((n)_{11}) \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_{121}) \Big] \\
\text{oder} & \Big[\quad n = \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\rightarrow}), \\
 & \qquad\qquad \mathrm{Sub}\big((n)_{2121}, (n)_{211}, \ulcorner \underline{\mathtt{0}} \urcorner \big), \\
 & \qquad\qquad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\rightarrow}), \\
 & \qquad\qquad\quad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\forall}), \\
 & \qquad\qquad\quad (n)_{211}, \\
 & \qquad\qquad\qquad \Big\langle \mathrm{SN}(\underline{\rightarrow}), \\
 & \qquad\qquad\qquad (n)_{2121}, \\
 & \qquad\qquad\qquad \mathrm{Sub}\Big((n)_{2121}, (n)_{211}, \big\langle \mathrm{SN}(\underline{+}), (n)_{211}, \ulcorner \underline{\mathtt{0}} \urcorner \big\rangle \Big) \Big\rangle \Big\rangle, \\
 & \qquad\qquad\quad (n)_{2121} \Big\rangle \Big\rangle \\
 & \quad \& \;\; \mathrm{Fml}((n)_{2121}) \quad \& \quad \mathrm{Var}((n)_{211}) \Big].
\end{array}
\right.
$$

Enthält $\Sigma_{\mathcal{N}}$ mehr als die Peano-Axiome, so ist diese Definition noch um weitere Klauseln zu ergänzen. Ist jedoch $\Sigma_{\mathcal{N}}$ entscheidbar, so ist per definitionem das zugehörige Prädikat $\mathrm{nlAx}_{\mathcal{N}}$ stets rekursiv.
Axiom:

$$\mathrm{Ax}(n) \quad :\Leftrightarrow \quad \mathrm{aAx}(n) \;\text{ oder }\; \mathrm{qAx}(n) \;\text{ oder }\; \mathrm{iAx}(n) \;\text{ oder }\; \mathrm{nlAx}(n).$$

„k“ folgt mittels Modus ponens aus „m“ und „n“:

$$\mathrm{MP}(m,n,k) \quad :\Leftrightarrow \quad m = \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\to}), n, k \big\rangle \;\;\&\;\; \mathrm{For}(n) \;\;\&\;\; \mathrm{For}(k).$$

„k“ folgt mittels Generalisierungsregel aus „n“:

$$\mathrm{Gen}(n,k) \quad :\Leftrightarrow \quad k = \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\forall}), (k)_1, n \big\rangle \;\;\&\;\; \mathrm{Var}((k)_1) \;\;\&\;\; \mathrm{For}(n).$$

b ist die Folgennummer einer Folge von Gödelnummern von Formeln, die zusammen einen Beweis bilden:

$$\mathrm{Bew}(b) \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} & \mathrm{Seq}(b) \;\;\&\;\; \mathrm{lh}(b) \neq 0 \\ \& & \text{für alle } i \text{ mit } i < \mathrm{lh}(b)\text{:} \\ & \Big[\qquad \mathrm{Ax}((b)_i) \\ & \;\text{oder ex. } j < i\text{: } \big(\qquad \mathrm{Gen}((b)_j, (b)_i) \\ & \qquad\qquad\qquad \text{oder ex. } k < i\text{: } \mathrm{MP}((b)_j, (b)_k, (b)_i)\big)\Big]. \end{cases}$$

„b“ ist ein Beweis der Formel „f“:

$$\mathrm{BewVon}(b,f) \quad :\Leftrightarrow \quad \mathrm{Bew}(b) \;\;\&\;\; f = (b)_{\mathrm{lh}(b) \dot{-} 1}.$$

Bew und BewVon sind rekursiv, wenn die Menge der nichtlogischen Axiome der betrachteten Theorie rekursiv ist, d.h. wenn das Prädikat nlAx, das die Gödelnummern nichtlogischer Axiome identifiziert, rekursiv ist.

„f“ ist ein Theorem, d.h. „f“ ist beweisbar aus den betrachteten nichtlogischen Axiomen (Dieses Prädikat ist *nicht* notwendigerweise rekursiv, da in der Definition ein unbeschränkter Existenzquantor vorkommt!):

$$\mathrm{Thm}(f) \quad :\Leftrightarrow \quad \text{ex. } b\text{: } \mathrm{BewVon}(b,f).$$

Wir führen zum Schluß noch über eine induktive Definition eine Funktion ein, deren Argumente natürliche Zahlen sind, die *nicht* als Gödelnummern aufgefaßt werden, und deren Werte die Gödelnummern der $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Terme sind, die jeweils diesen natürlichen Zahlen entsprechen. D.h. wir stecken in diese Funktion etwas *Uncodiertes* aus der Metaebene M hinein und erhalten daraus etwas *Codiertes*, ein Objekt der Gödel-Ebene G.

$$\begin{aligned} \mathrm{Num}(0) &:= \langle \mathrm{SN}(\underline{0}) \rangle, \\ \text{für alle } n \in \mathbb{N}: \;\; \mathrm{Num}(n+1) &:= \big\langle \mathrm{SN}(\underline{+}), \ulcorner \underline{1} \urcorner, \mathrm{Num}(n) \big\rangle. \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Num}(n) = \ulcorner \mathrm{k}_n \urcorner.$$

Zur Übersicht seien hier noch einmal alle für die Gödel-Ebene eingeführten Funktionen und Prädikate zusammen mit ihren Bedeutungen aufgelistet:

M	G
$x \in \mathrm{Vbl}$	$\mathrm{Var}(\ulcorner x \urcorner)$
$t \in \mathrm{Tm}(\mathcal{L}_\mathcal{N})$	$\mathrm{Term}_\mathcal{N}(\ulcorner t \urcorner)$
φ ist eine $\mathcal{L}_\mathcal{N}$-Primformel	$\mathrm{PFor}_\mathcal{N}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
$\varphi \in \mathrm{Fml}(\mathcal{L}_\mathcal{N})$	$\mathrm{For}_\mathcal{N}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
$b(x/t)$	$\mathrm{Sub}(\ulcorner b \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner t \urcorner)$
x ist frei in b	$\mathrm{Fr}(\ulcorner x \urcorner, \ulcorner b \urcorner)$
t ist frei für x in b	$\mathrm{Sbar}(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner b \urcorner)$
φ ist ein aussagenlogisches Axiom für $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$	$\mathrm{aAx}_\mathcal{N}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
φ ist ein quantorenlogisches Axiom für $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$	$\mathrm{qAx}_\mathcal{N}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
φ ist ein identitätslogisches Axiom für $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$	$\mathrm{iAx}_\mathcal{N}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
φ ist ein nichtlogisches Axiom für $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$	$\mathrm{nlAx}_\mathcal{N}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
φ ist ein Axiom für $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$	$\mathrm{Ax}_\mathcal{N}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
χ folgt mittels Modus ponens aus φ und ψ	$\mathrm{MP}(\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \chi \urcorner)$
χ folgt mittels Generalisierung aus φ	$\mathrm{Gen}(\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \chi \urcorner)$
$(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ ist ein $\Sigma_\mathcal{N}$-Beweis	$\mathrm{Bew}_\mathcal{N}\big(\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle\big)$
$(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ ist ein $\Sigma_\mathcal{N}$-Beweis für φ	$\mathrm{BewVon}_\mathcal{N}\big(\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle, \ulcorner \varphi \urcorner\big)$
$\Sigma_\mathcal{N} \vdash \varphi$	$\mathrm{Thm}_\mathcal{N}(\ulcorner \varphi \urcorner)$

4.3 Formalisierung der arithmetisierten Logik (M → F)

Die Mühe, auch den zweiten Schritt unserer Übersetzung zu Fuß durchzuführen, erspart uns der Repräsentierbarkeitssatz für rekursive arithmetische Funktionen. Zur Erinnerung hier noch einmal die relevanten Begriffe und der Satz (k_n liefert dabei einen der natürlichen Zahl n entsprechenden $\mathcal{L}_\mathcal{N}$-Term, s. S. 11):

Definition 4 *φ sei eine $\mathcal{L}_\mathcal{N}$-Formel, und x_1, x_2, …, x_m, y seien paarweise verschiedene Variablen. Für Funktionen f von $\mathbb{N}^m$ nach $\mathbb{N}$ sagen wir,* φ mit x_1, x_2, …, x_m, y repräsentiere f (ziffernweise) in $\Sigma_\mathcal{N}$, *wenn für alle n_1, n_2, …, $n_m \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\Sigma_\mathcal{N} \ \vdash \ \varphi(x_1/\mathrm{k}_{n_1}, x_2/\mathrm{k}_{n_2}, \ldots, x_m/\mathrm{k}_{n_m}) \leftrightarrow \dot{\equiv}\, y\; \mathrm{k}_{f(n_1,n_2,\ldots,n_m)}.$$

Weiter sagen wir für m-stellige Relationen R auf $\mathbb{N}$, φ mit x_1, x_2, …, x_m repräsentiere R (ziffernweise) in $\Sigma_\mathcal{N}$, *wenn für alle n_1, n_2, …, $n_m \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$R(n_1, n_2, \ldots, n_m) \ \Rightarrow \ \Sigma_\mathcal{N} \vdash \varphi(x_1/\mathrm{k}_{n_1}, x_2/\mathrm{k}_{n_2}, \ldots, x_m/\mathrm{k}_{n_m})$$

und

$$\text{nicht } R(n_1, n_2, \ldots, n_m) \ \Rightarrow \ \Sigma_\mathcal{N} \vdash \dot{\neg}\varphi(x_1/\mathrm{k}_{n_1}, x_2/\mathrm{k}_{n_2}, \ldots, x_m/\mathrm{k}_{n_m}).$$

Gibt es eine $\mathcal{L}_\mathcal{N}$-Formel φ und Variablen, so daß φ mit diesen Variablen f (bzw. R) in $\Sigma_\mathcal{N}$ ziffernweise repräsentiert, so heißt f (bzw. R) in $\Sigma_\mathcal{N}$ (ziffernweise) repräsentierbar.

Daß eine Funktion oder eine Relation repräsentierbar ist, heißt also, daß es eine Formel gibt, die sich gewissermaßen beweisbarerweise gerade so wie jene verhält.

Satz 3 (Repräsentierbarkeitssatz) *Alle rekursiven arithmetischen Funktionen und Relationen sind in $\Sigma_\mathcal{N}$ ziffernweise repräsentierbar.*

Damit sind auch alle in Abschnitt 4.2 eingeführten Prädikate und Funktionen mit Ausnahme von Thm repräsentierbar.

5 Selbstreferenz: Das Diagonallemma

Nachdem wir im vorigen Abschnitt Formeln beigebracht haben, über andere Formeln zu sprechen, werden wir nun sehen, wie Formeln auch über sich selbst sprechen können. Wir zeigen hier allgemein, daß es zu jeder „Eigenschaft σ von ($\underline{\mathtt{v}}$)“ (d.h. zu jeder Formel σ, in der $\underline{\mathtt{v}}$ frei vorkommt) eine Formel γ gibt, die – im Rahmen der Peano-Arithmetik – gerade von sich selbst behauptet, diese „Eigenschaft“ zu haben.

Definition 5 *Sind γ und σ $\mathcal{L}_\mathcal{N}$-Formeln, so heißt γ ein* ($\Sigma_\mathcal{N}$-)Fixpunkt von σ *genau dann, wenn*

$$\Sigma_\mathcal{N} \vdash \gamma \leftrightarrow \sigma(\underline{\mathtt{v}}/\mathrm{k}_{\ulcorner\gamma\urcorner}).$$

Üblicherweise heißt ein Argument *a Fixpunkt* einer Funktion *f*, wenn $f(a) = a$. Ein solcher Fixpunkt gibt eine Stelle an, wo der Graph von f die „Diagonale“ $\{ (x, x) \mid x \in \mathrm{D}(f) \}$ schneidet. Analog nennt man γ hier einen $\Sigma_\mathcal{N}$-Fixpunkt von σ, weil nach Einsetzen von γ (genauer, seiner Gödelnummer $\ulcorner\gamma\urcorner$) für $\underline{\mathtt{v}}$ in σ wieder γ „herauskommt“ – modulo $\Sigma_\mathcal{N}$-Äquivalenz. Deswegen heißt das folgende Lemma auch *Diagonallemma*: Weil es besagt, daß jede Formel σ eine „Stelle“ γ hat, an der sie „die Diagonale schneidet“. (Die Variablen $\mathtt{v}_1, \mathtt{v}_2, \ldots, \mathtt{v}_n$ sind dabei als „Parameter“ für σ bzw. γ aufzufassen.)

Lemma 4 (Diagonallemma von Gödel) *Ist σ eine $\mathcal{L}_\mathcal{N}$-Formel mit den freien Variablen $\mathtt{v}_0, \mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n$, so gibt es einen $\Sigma_\mathcal{N}$-Fixpunkt γ von σ mit den freien Variablen $\mathtt{v}_1, \mathtt{v}_2, \ldots, \mathtt{v}_n$.*

Beweis: (In den zunächst folgenden heuristischen Überlegungen sei $n = 0$, d.h. wir tun der Einfachheit halber so, als gäbe es keine zusätzlichen „Parameter“ $\mathtt{v}_1, \mathtt{v}_2, \ldots, \mathtt{v}_n$.) Wir wollen eine Formel γ konstruieren, die sich auf sich selbst bezieht. Dies kann γ nur auf dem Umweg über seine Gödelnummer tun; γ kann jedoch seine eigene Gödelnummer nicht explizit enthalten, weil die Gödelnummer einer Formel stets größer ist als die jedes in der Formel vorkommenden Terms.

Also muß die Gödelnummer von γ in γ irgendwie beschrieben werden (vgl. Abschnitt 2, S. 9).

Nehmen wir einmal an, wir hätten eine abhängig von n eindeutige syntaktische Beschreibung der Gödelnummer von γ durch α; d.h. wenn n festgelegt ist, so gebe es genau ein x mit $\Sigma_{\mathcal{N}} \vdash (\alpha(\underline{\mathtt{v}}, x))(\underline{\mathtt{v}}/\mathrm{k}_n)$. Setzen wir dann in

$$\exists x(\alpha(\underline{\mathtt{v}}, x) \wedge \sigma(x)) \tag{1}$$

k_n anstelle von $\underline{\mathtt{v}}$ ein, so ist die erhaltene Aussage gleichbedeutend mit:

Das x, das man durch α aus n erhält, hat die Eigenschaft σ. (2)

Was wir möchten, ist, daß x durch α gerade auf die Gödelnummer unserer zu konstruierenden Formel γ festgelegt wird. Haben wir unser n richtig gewählt, so besagt also (2) gerade:

$\ulcorner\gamma\urcorner$ hat die Eigenschaft σ.

Das ist aber genau, was wir als Inhalt von γ haben wollten! Haben wir unser „Verfahren“ α zur Konstruktion von γ richtig gewählt und substituieren wir das richtige k_n in (1) für $\underline{\mathtt{v}}$, so erhalten wir γ. Ein mögliches Konstruktionsverfahren für γ wäre damit eine Substitution (in (1)).

Gibt es nun ein n, das uns über dieses Verfahren tatsächlich $\ulcorner\gamma\urcorner$ liefert? – Wenn wir γ über eine Substitution in (1) erhalten wollen, muß das diese Substitution widerspiegelnde „Konstruktionsverfahren“ α auf jeden Fall irgendwie auf die Gödelnummer von (1) zurückgreifen. Da α aber selbst in (1) vorkommt, kann α die Gödelnummer von (1) nicht von vornherein enthalten. Wir müssen also mindestens diese Gödelnummer nachträglich in α bzw. in (1) einsetzen. Dies *genügt* aber auch schon, wenn das Verfahren α richtig gewählt ist. Die richtige Beschreibung des x, das bei α „herauskommen“ soll, – bzw. die Umschreibung eines geeigneten α – ist:

> Man erhält x, wenn man in (1) dessen eigene Gödelnummer für $\underline{\mathtt{v}}$ substituiert.

Der Witz ist, daß wir *dieses* Verfahren in (1) angeben können, ohne die Gödelnummer von (1) zu benützen, nämlich wenn wir (1) folgendermaßen in Abhängigkeit von einer Variablen spezifizieren:

Das x, das man erhält, wenn man in ($\underline{\mathtt{v}}$) dessen eigene Gödelnummer für $\underline{\mathtt{v}}$ substituiert, hat die Eigenschaft σ. (3)

Die (3) entsprechende Formel ((1) mit geeignetem α) werden wir ‚β‘ nennen.[10] Wenn wir nun in dieses β seine eigene Gödelnummer einsetzen, geben wir damit

[10] β wird als einzige freie Variable $\underline{\mathtt{v}}$ enthalten. Diese Variable ist die „Leerstelle“, an der später $\ulcorner\beta\urcorner$ eingesetzt werden wird. Nun kommt $\underline{\mathtt{v}}$ in der Umschreibung (3) von β an *zwei* Stellen vor. Die erste davon, das eingeklammerte Vorkommen von $\underline{\mathtt{v}}$, bezeichnet die Leerstelle; für dieses $\underline{\mathtt{v}}$ wird später $\ulcorner\beta\urcorner$ substituiert werden. Das zweite Vorkommen spezifiziert, wie mit β syntaktisch verfahren werden soll, nämlich, für welche Variable substituiert werden soll. Dieses

die Formel an, in der substituiert werden soll, und gleichzeitig die Gödelnummer, die dort eingesetzt werden soll. An dieser Stelle beißt sich quasi die Schlange in den eigenen Schwanz.

Machen wir uns klar, daß wir, wenn wir in β für $\underline{\mathtt{v}}$ nicht die Gödelnummer *irgendeiner* Formel, sondern gerade dessen *eigene* einsetzen, die gewünschte selbstbezügliche Formel γ erhalten. Die erhaltene Aussage würde besagen (vgl. (3)):

> Das, was man erhält, wenn man in β dessen eigene Gödelnummer für $\underline{\mathtt{v}}$ substituiert, hat die Eigenschaft σ.

Diese Aussage hätten wir aber gerade über die darin beschriebene Substitution erhalten; sie ist gerade *das, was man erhält, wenn man in β dessen eigene Gödelnummer für $\underline{\mathtt{v}}$ substituiert.* Sie spräche sich also selbst die Eigenschaft σ zu. Eine solche Aussage wäre also tatsächlich gerade das Ziel γ all unserer Mühen.

Um jetzt die Formel β mit dem in (3) angegebenen Inhalt zu konstruieren, damit wir einen strengen Beweis für die Behauptung des Lemmas liefern können, brauchen wir zunächst eine formalisierte Fassung des Substitutionsbegriffs in seiner G-Version. Diese wird uns der Repräsentierbarkeitssatz liefern. Unter Rückgriff auf die Gödelnummern der betrachteten Bezeichner hatten wir die Substitution in der arithmetischen bzw. G-Funktion Sub gefaßt (s. S. 16). Wir wollen hier in einer Formel deren eigene Gödelnummer substituieren, also müssen wir Sub folgendermaßen abwandeln:

$$S(f) := \mathrm{Sub}(f, \lceil \underline{\mathtt{v}} \rceil, \mathrm{Num}(f)). \tag{4}$$

Ist φ eine $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formel und $f = \lceil \varphi \rceil$, so ist $\mathrm{Num}(f) = \lceil \mathrm{k}_f \rceil$ die Gödelnummer der $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Darstellung von $\lceil \varphi \rceil$, also die Gödelnummer desjenigen Terms, den wir in φ selbst einsetzen wollen. $S(f)$ ist dann *das, was man erhält, wenn man in φ dessen eigene Gödelnummer für $\underline{\mathtt{v}}$ substituiert* – in G-Begriffen formuliert.

Man sieht leicht, daß aufgrund der Rekursivität von Sub und Num auch S rekursiv ist. Also existiert wegen des Repräsentierbarkeitssatzes (s. S. 23) eine $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formel α mit $\mathrm{Fr}(\alpha) = \{\underline{\mathtt{v}}, \underline{\mathtt{'v}}\}$, so daß für alle $f \in \mathbb{N}$ gilt:[11]

$$\begin{aligned} & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \alpha(\mathrm{k}_f) \leftrightarrow \underline{\doteq}\ \underline{\mathtt{'v}}\ \mathrm{k}_{S(f)}, \\ \Rightarrow\ & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \alpha(\mathrm{k}_{\lceil\beta\rceil}) \leftrightarrow \underline{\doteq}\ \underline{\mathtt{'v}}\ \mathrm{k}_{S(\lceil\beta\rceil)}, \\ \overset{(\forall)}{\Rightarrow}\ & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \underline{\forall\mathtt{'v}}\big(\alpha(\mathrm{k}_{\lceil\beta\rceil}) \leftrightarrow \underline{\doteq}\ \underline{\mathtt{'v}}\ \mathrm{k}_{S(\lceil\beta\rceil)}\big). \end{aligned} \tag{5}$$

zweite Vorkommen in der Umschreibung wird in der *Formel β kein* Vorkommen von $\underline{\mathtt{v}}$ mehr sein: Es ist Teil der Beschreibung eines syntaktischen Verfahrens, und diese Beschreibung wird in β die Formalisierung (F-Übersetzung) einer G-Funktion sein, die auf die Gödelnummer (d.h. die G-Übersetzung) der Formel β und der Variable $\underline{\mathtt{v}}$ zurückgreift. Kürzer gesagt, wird dieses zweite $\underline{\mathtt{v}}$ in der Formel β bereits einmal die Übersetzungsschleife von F über G (und damit M) wieder nach F durchgemacht haben. Noch kürzer gesagt: Das zweite $\underline{\mathtt{v}}$ in der *Umschreibung* von β wird in *β selbst* „wegcodiert“ sein.

[11] Ich verwende die Konvention, ‚$\varphi(t_0, t_1, \ldots, t_m)$‘ statt ‚$\varphi(\mathrm{v}_0/t_0, \mathrm{v}_1/t_1, \ldots, \mathrm{v}_m/t_m)$‘ zu schreiben.

Sei x eine Variable, die weder in σ noch in α vorkommt. Damit können wir setzen:

$$\beta := \exists x\big(\alpha(\underline{\mathtt{'v}}/x) \wedge \sigma(x)\big) \tag{6}$$

und

$$\gamma := \beta(\mathrm{k}_{\ulcorner\beta\urcorner}). \tag{7}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
& S(\ulcorner\beta\urcorner) \overset{(4)}{=} \mathrm{Sub}(\ulcorner\beta\urcorner, \ulcorner\underline{\mathtt{v}}\urcorner, \mathrm{Num}(\ulcorner\beta\urcorner)) = \ulcorner\beta(\mathrm{k}_{\ulcorner\beta\urcorner})\urcorner \overset{(7)}{=} \ulcorner\gamma\urcorner,\\
\overset{(5)}{\Rightarrow}\quad & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \underline{\forall\mathtt{'v}}\big(\alpha(\mathrm{k}_{\ulcorner\beta\urcorner}) \leftrightarrow \underline{\doteq}\ \underline{\mathtt{'v}}\ \mathrm{k}_{\ulcorner\gamma\urcorner}\big),\\
\overset{\text{(geb. Umb.)}}{\Leftrightarrow}\quad & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \underline{\forall} x\big(\alpha(\mathrm{k}_{\ulcorner\beta\urcorner}, x) \leftrightarrow \underline{\doteq}\ x\ \mathrm{k}_{\ulcorner\gamma\urcorner}\big),\\
\overset{(\forall\mathrm{B})}{\Rightarrow}\quad & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \alpha(\mathrm{k}_{\ulcorner\beta\urcorner}, x) \leftrightarrow \underline{\doteq}\ x\ \mathrm{k}_{\ulcorner\gamma\urcorner},
\end{aligned} \tag{8}$$

d.h. setzt man in α die Gödelnummer von β für $\underline{\mathtt{v}}$ ein und x für $\underline{\mathtt{'v}}$, so wird x dadurch auf die Gödelnummer von γ festgelegt.

$$\begin{aligned}
\gamma \ & \overset{(7)}{=}\ \beta(\mathrm{k}_{\ulcorner\beta\urcorner})\\
& \overset{(6)}{=}\ \big[\exists x\big(\alpha(\underline{\mathtt{'v}}/x) \wedge \sigma(\underline{\mathtt{v}}/x)\big)\big](\underline{\mathtt{v}}/\mathrm{k}_{\ulcorner\beta\urcorner})\\
& =\ \exists x\big(\alpha(\mathrm{k}_{\ulcorner\beta\urcorner}, x) \wedge \sigma(x)\big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \gamma \leftrightarrow \exists x\big(\alpha(\mathrm{k}_{\ulcorner\beta\urcorner}, x) \wedge \sigma(x)\big),\\
\overset{(8)}{\Leftrightarrow}\quad & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \gamma \leftrightarrow \exists x\big(\underline{\doteq}\ x\ \mathrm{k}_{\ulcorner\gamma\urcorner} \wedge \sigma(x)\big),\\
\Leftrightarrow\quad & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \gamma \leftrightarrow \sigma(\mathrm{k}_{\ulcorner\gamma\urcorner}).
\end{aligned}$$

qed

6 Erster Unvollständigkeitsbeweis

Wir erinnern uns, daß wir die Unvollständigkeit von $\Sigma_{\mathcal{N}}$ für $\mathcal{N}$ durch die Konstruktion einer $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Aussage beweisen wollten, die gerade von sich selbst behauptet, nicht aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ ableitbar zu sein (s. Abschnitt 2). Dies ist nun wegen des Diagonallemmas nicht mehr schwierig.

Zwar wissen wir nicht, ob das Prädikat $\mathrm{Thm}_{\mathcal{N}}$, das gerade auf die Gödelnummern $\Sigma_{\mathcal{N}}$-beweisbarer Formeln zutrifft, in $\Sigma_{\mathcal{N}}$ repräsentierbar ist, aber der Repräsentierbarkeitssatz garantiert uns, daß zumindest $\mathrm{BewVon}_{\mathcal{N}}$ es ist. Also gibt es eine Formel β mit $\mathrm{Fr}(\beta) = \{\underline{\mathtt{v}}, \underline{\mathtt{'v}}\}$, so daß für alle $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formeln φ_1, φ_2, …, φ_n gilt:

$$\begin{aligned}
& (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \text{ ist ein } \Sigma_{\mathcal{N}}\text{-Beweis von } \varphi_n\\
\Leftrightarrow\quad & \mathrm{BewVon}_{\mathcal{N}}\big(\langle\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\rangle, \ulcorner\varphi_n\urcorner\big)\\
\overset{!}{\Rightarrow}\quad & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \beta(\mathrm{k}_{\langle\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\rangle}, \mathrm{k}_{\ulcorner\varphi_n\urcorner})
\end{aligned} \tag{9}$$

und

$$\begin{aligned}
& (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \text{ ist kein } \Sigma_{\mathcal{N}}\text{-Beweis von } \varphi_n \\
\Leftrightarrow\quad & \text{nicht } \mathrm{BewVon}_{\mathcal{N}}\big(\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle, \ulcorner \varphi_n \urcorner\big) \\
\overset{!}{\Rightarrow}\quad & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \underline{\neg}\beta(\mathrm{k}_{\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle}, \mathrm{k}_{\ulcorner \varphi_n \urcorner}).
\end{aligned} \tag{10}$$

Daß eine Formel ($\underline{\texttt{v}}$) nicht aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ ableitbar ist, können wir nun durch

$$\underline{\neg}\underline{\exists}\,\underline{\texttt{'v}}\ \beta(\underline{\texttt{'v}}, \underline{\texttt{v}}) \tag{11}$$

ausdrücken. (11) besagt, daß es keine natürliche Zahl ($\underline{\texttt{'v}}$) gibt, die Codenummer eines Beweises für die Formel mit der Gödelnummer ($\underline{\texttt{v}}$) ist. Das Gödelsche Diagonallemma liefert uns zu (11) einen Fixpunkt γ, d.h.:

$$\Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \gamma \leftrightarrow \underline{\neg}\underline{\exists}\,\underline{\texttt{'v}}\ \beta(\underline{\texttt{'v}}, \mathrm{k}_{\ulcorner \gamma \urcorner}). \tag{12}$$

γ ist also genau dann aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ ableitbar, wenn es einen Beweis dafür gibt, daß γ nicht ableitbar ist. (Solche Fixpunkte heißen *Gödel-Fixpunkte*.) Daraus werden wir einen Widerspruch zur Vollständigkeit von $\Sigma_{\mathcal{N}}$ für $\mathcal{N}$ erhalten.

Angenommen, γ sei aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ ableitbar, so gibt es $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, so daß $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \gamma)$ ein $\Sigma_{\mathcal{N}}$-Beweis ist.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \mathrm{BewVon}_{\mathcal{N}}\big(\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \gamma \rangle, \ulcorner \gamma \urcorner\big), \\
\overset{(9)}{\Rightarrow}\quad & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \beta(\mathrm{k}_{\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \gamma \rangle}, \mathrm{k}_{\ulcorner \gamma \urcorner}), \\
\Rightarrow\quad & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \underline{\exists}\,\underline{\texttt{'v}}\ \beta(\underline{\texttt{'v}}, \mathrm{k}_{\ulcorner \gamma \urcorner}), \\
\overset{(12)}{\Rightarrow}\quad & \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \underline{\neg}\gamma, \\
\Rightarrow\quad & \Sigma_{\mathcal{N}} \nvdash \gamma,
\end{aligned}$$

denn $\Sigma_{\mathcal{N}}$ ist widerspruchsfrei. Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme.

γ ist also nicht aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ ableitbar. Das bräuchte uns keine Sorgen zu machen, wenn γ in $\mathcal{N}$ falsch wäre. Das Gegenteil ist aber der Fall, wie wir sehen werden.

Aus $\Sigma_{\mathcal{N}} \nvdash \gamma$ folgt nämlich:

$$\begin{aligned}
& \text{für alle } b \in \mathbb{N}\text{: nicht } \mathrm{BewVon}_{\mathcal{N}}(b, \ulcorner \gamma \urcorner), \\
\overset{(10)}{\Rightarrow}\quad & \text{für alle } b \in \mathbb{N}\text{: } \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \underline{\neg}\beta(\mathrm{k}_b, \mathrm{k}_{\ulcorner \gamma \urcorner}), \\
\Rightarrow\quad & \text{für alle } b \in \mathbb{N}\text{: } \mathcal{N} \models \underline{\neg}\beta(\mathrm{k}_b, \mathrm{k}_{\ulcorner \gamma \urcorner}),
\end{aligned}$$

da $\Sigma_{\mathcal{N}}$ nach Voraussetzung korrekt für $\mathcal{N}$ ist.

$$\begin{array}{lll}
\Leftrightarrow & \text{für alle } b \in \mathbb{N}\text{: für alle Belegungen } h \text{ in } \mathcal{N}\text{:} & \mathcal{N} \models \underline{\neg}\beta(\mathrm{k}_b, \mathrm{k}_{\ulcorner \gamma \urcorner})\ [h], \\
\overset{(\text{Überf.lemma})}{\Leftrightarrow} & \text{für alle Belegungen } h \text{ in } \mathcal{N}\text{: für alle } b \in \mathbb{N}\text{:} & \mathcal{N} \models \underline{\neg}\beta(\underline{\texttt{'v}}, \mathrm{k}_{\ulcorner \gamma \urcorner}) \left[h\begin{pmatrix} \texttt{'v} \\ b \end{pmatrix}\right], \\
\Leftrightarrow & \text{für alle Belegungen } h \text{ in } \mathcal{N}\text{:} & \mathcal{N} \models \underline{\forall}\,\underline{\texttt{'v}}\ \underline{\neg}\beta(\underline{\texttt{'v}}, \mathrm{k}_{\ulcorner \gamma \urcorner})\ [h], \\
\Leftrightarrow & & \mathcal{N} \models \underline{\forall}\,\underline{\texttt{'v}}\ \underline{\neg}\beta(\underline{\texttt{'v}}, \mathrm{k}_{\ulcorner \gamma \urcorner}), \\
\Leftrightarrow & & \mathcal{N} \models \underline{\neg}\underline{\exists}\,\underline{\texttt{'v}}\ \beta(\underline{\texttt{'v}}, \mathrm{k}_{\ulcorner \gamma \urcorner}).
\end{array}$$

Aus (12) erhalten wir, wieder wegen der Korrektheit von $\Sigma_{\mathcal{N}}$:

$$\mathcal{N} \models \gamma \leftrightarrow \underline{\neg\exists}\,\underline{\mathtt{'v}}\,\beta(\underline{\mathtt{'v}}, \mathrm{k}_{\lceil\gamma\rceil}).$$

Aus diesen Aussagen folgt schlußendlich:

$$\mathcal{N} \models \gamma.$$

Wie versprochen ist also γ eine in $\mathcal{N}$ wahre, aber aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ nicht ableitbare Aussage. $\Sigma_{\mathcal{N}}$ ist damit unvollständig für $\mathcal{N}$ und wegen Bemerkung 1 sogar unvollständig überhaupt. *qed*

7 Zweiter Unvollständigkeitsbeweis

Wir erhalten auch noch ein etwas stärkeres Resultat (vgl. Satz 2):

Satz 5 *Jede entscheidbare, widerspruchsfreie (z.B. für $\mathcal{N}$ korrekte) $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formelmenge $\Sigma_{\mathcal{N}}$, die die Peano-Axiome enthält, ist unvollständig, insbesondere für $\mathcal{N}$.*

Dazu brauchen wir zunächst den folgenden Satz:

Satz 6 *Ist $\Sigma_{\mathcal{N}}$ eine widerspruchsfreie Menge von $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formeln, die die Peano-Axiome enthält, so ist die Menge der aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ ableitbaren Formeln $\{\, \alpha \in \mathrm{Fml}(\mathcal{L}_{\mathcal{N}}) \mid \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \alpha \,\}$ unentscheidbar bzw. $\mathrm{Thm}_{\mathcal{N}}$ nicht rekursiv.*

Beweis: Wir zeigen, daß eine $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formelmenge $\Sigma_{\mathcal{N}}$, die die Peano-Axiome enthält, widerspruchsvoll sein muß, wenn die Menge der aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ ableitbaren Formeln entscheidbar ist.

Sei also $\{\, \alpha \in \mathrm{Fml}(\mathcal{L}_{\mathcal{N}}) \mid \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \alpha \,\}$ entscheidbar. Dann ist

$$G := \{\, \lceil\alpha\rceil \mid \alpha \in \mathrm{Fml}(\mathcal{L}_{\mathcal{N}}) \ \& \ \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \alpha \,\}$$

rekursiv, und nach dem Repräsentierbarkeitssatz existiert eine $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formel β mit $\mathrm{Fr}(\beta) = \{\underline{\mathtt{v}}\}$, die G repräsentiert, d.h. für alle $\alpha \in \mathrm{Fml}(\mathcal{L}_{\mathcal{N}})$:

$$\Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \alpha \quad\Leftrightarrow\quad \lceil\alpha\rceil \in G \quad\overset{!}{\Rightarrow}\quad \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \beta(\mathrm{k}_{\lceil\alpha\rceil}) \tag{13}$$

und

$$\Sigma_{\mathcal{N}} \nvdash \alpha \quad\Leftrightarrow\quad \lceil\alpha\rceil \notin G \quad\overset{!}{\Rightarrow}\quad \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \underline{\neg}\beta(\mathrm{k}_{\lceil\alpha\rceil}). \tag{14}$$

Nun besitzt β aufgrund des Diagonallemmas einen Fixpunkt $\gamma \in \mathrm{Fml}(\mathcal{L}_{\mathcal{N}})$, d.h.:

$$\Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \gamma \leftrightarrow \underline{\neg}\beta(\mathrm{k}_{\lceil\gamma\rceil}). \tag{15}$$

Damit ist aber $\Sigma_{\mathcal{N}}$ widerspruchsvoll, denn sowohl γ als auch $\underline{\neg}\gamma$ sind aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ ableitbar:

Angenommen, es gälte $\Sigma_{\mathcal{N}} \nvdash \gamma$.

$$\begin{aligned} &\overset{(14)}{\Rightarrow} && \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \underline{\neg}\beta(\mathrm{k}_{\ulcorner\gamma\urcorner}), \\ &\overset{(15)}{\Leftrightarrow} && \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \gamma. \end{aligned}$$

Also ist γ doch ableitbar.

$$\begin{aligned} &\overset{(13)}{\Rightarrow} && \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \beta(\mathrm{k}_{\ulcorner\gamma\urcorner}), \\ &\overset{(15)}{\Leftrightarrow} && \Sigma_{\mathcal{N}} \vdash \underline{\neg}\gamma. \end{aligned}$$

qed

Nun können wir Satz 5 beweisen:

Beweis: Wäre $\Sigma_{\mathcal{N}}$ vollständig, so wäre die Menge der aus $\Sigma_{\mathcal{N}}$ ableitbaren Formeln entscheidbar, wie wir gleich sehen werden. Das widerspräche aber Satz 6. Zu zeigen ist also nur, daß $\mathrm{Thm}_{\mathcal{N}}$ unter der Annahme der Vollständigkeit von $\Sigma_{\mathcal{N}}$ rekursiv ist.

Dazu skizzieren wir im folgenden einen Algorithmus, mit dem in endlicher Zeit festgestellt werden kann, ob $\mathrm{Thm}_{\mathcal{N}}$ auf eine natürliche Zahl n zutrifft:

Zunächst testen wir n mit dem (rekursiven) Prädikat $\mathrm{For}_{\mathcal{N}}$ darauf hin, ob es überhaupt die Gödelnummer einer $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$-Formel ist. Fällt die Prüfung negativ aus, so kann auch $\mathrm{Thm}_{\mathcal{N}}(n)$ nicht gelten.

Andernfalls gibt es ein $\alpha \in \mathrm{Fml}(\mathcal{L}_{\mathcal{N}})$ mit $\ulcorner\alpha\urcorner = n$. Wir konstruieren (in rekursiver Weise) eine Art von Allabschluß $\overline{\alpha}$ zu α, indem wir für alle $l \in \mathbb{N}$ setzen:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Gnrl}(0,l) &:=\;& l, \\ \text{für alle } k \in \mathbb{N}\text{:}\quad &\mathrm{Gnrl}(k+1,l) &:=\;& \big\langle \mathrm{SN}(\underline{\forall}), \ulcorner \mathtt{v}_k \urcorner, \mathrm{Gnrl}(k,l)\big\rangle, \\ &\overline{n} &:=\;& \mathrm{Gnrl}(n,n). \end{aligned}$$

Die Formel, deren Gödelnummer $\overline{n}$ ist, können wir nun $\overline{\alpha}$ nennen, denn es gilt:

$$\overline{n} = \big\ulcorner \underline{\forall}\mathtt{v}_{n-1}\underline{\forall}\mathtt{v}_{n-2}\ldots\underline{\forall}\mathtt{v}_0\alpha \big\urcorner.$$

Da n größer als die Gödelnummer jeder in α vorkommenden Variable $\mathtt{v}_k$ (und damit erst recht größer als k) sein muß, haben wir in $\overline{\alpha}$ alle Variablen aus $\mathrm{Fr}(\alpha)$ gebunden; $\overline{\alpha}$ ist also eine Aussage.

Nun fahren wir fort, indem wir nacheinander für 0, 1, 2, ... betrachten, ob diese in der (rekursiven) Relation $\mathrm{BewVon}_{\mathcal{N}}$ zu $\overline{n}$ ($= \ulcorner\overline{\alpha}\urcorner$) oder $\langle \mathrm{SN}(\underline{\neg}), \overline{n}\rangle$ ($= \ulcorner\underline{\neg}\overline{\alpha}\urcorner$) stehen. Da wir angenommen haben, daß $\Sigma_{\mathcal{N}}$ vollständig ist, ist eine der beiden Aussagen ableitbar und gibt es also eine natürliche Zahl m, die für einen Beweis entweder von $\overline{\alpha}$ oder von $\underline{\neg}\overline{\alpha}$ steht. Für das kleinste solche m überprüfen wir jetzt, ob $\mathrm{BewVon}_{\mathcal{N}}(m, \ulcorner\overline{\alpha}\urcorner)$ wahr ist. Wenn ja, so codiert m einen Beweis für $\overline{\alpha}$, und sonst einen für $\underline{\neg}\overline{\alpha}$. Im ersten Fall gilt dann auch $\mathrm{Thm}_{\mathcal{N}}(\ulcorner\alpha\urcorner)$, d.h. $\mathrm{Thm}_{\mathcal{N}}(n)$; im zweiten ist $\mathrm{Thm}_{\mathcal{N}}(n)$ falsch. *qed*

Literatur

[Frd] Friedrichsdorf, Ulf: *Einführung in die klassische und intensionale Logik.* Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1992.

[GEB] Hofstadter, Douglas R.: *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.* New York: Basic Books, 1979.

Ein vor allem vom didaktischen Standpunkt aus wunderschönes Buch, das sich sehr intensiv mit dem GUS, aber auch mit vielen anderen Dingen befaßt.

[MeT] Hofstadter, Douglas R.: *Metamagical Themas: Questing for the Essence of Mind and Pattern.* New York: Basic Books, 1985.

Eine Sammlung von Hofstadters Kolumnen für *Scientific American*, die sich – neben vielem anderen – auch mit Selbstreferenz befassen.

[Pr] Prestel, Alexander: *Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie.* Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1986.

[Shf] Shoenfield, Joseph R.: *Mathematical Logic.* Reading, Menlo Park, London, Don Mills: Addison-Wesley, 1967.

[FUn] Smullyan, Raymond: *Forever Undecided – A Puzzle Guide to Gödel.* Oxford University Press, 1988.

Dieses Buch befaßt sich mit dem *zweiten* Gödelschen Unvollständigkeitssatz und steht hier nur der Unvollständigkeit halber. Wer sich für den zweiten Unvollständigkeitssatz interessiert, bekommt hier auf eher spielerische Weise ein Verständnis des Satzes vermittelt.